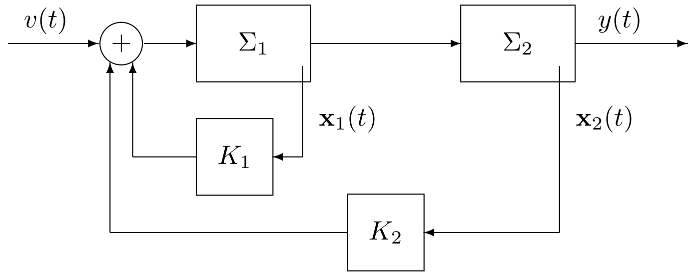
1. CONNESSIONI

Esercizio 1.1. Si consideri lo schema di figura, in cui i sistemi Σ_1 e Σ_2 sono sistemi discreti connessi in serie e i segnali di retroazione dallo stato di Σ_1 e dallo stato di Σ_2 vengono iniettati all'ingresso della connessione serie.



Si suppone

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{1.1}$$

e che Σ_2 sia realizzazione minima della funzione di trasferimento

$$w_2(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^3 + 2z^2} \tag{1.2}$$

2_i) Quando K_1 e K_2 sono entrambe nulle, il sistema serie è raggiungibile? è osservabile?

2_{ii}) Esistono matrici di retroazione K_1 e K_2 in corrispondenza alle quali il sistema di figura è internamente asintoticamente stabile? In caso affermativo, si fornisca almeno un esempio di coppia (K_1, K_2) stabilizzante.

2_{iii}) Il sistema reazionato ammette, per qualche scelta di K_1 e di K_2, uno stimatore asintotico?

(i) La funzione di trasferimento di Σ_1 *è*

$$\frac{H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)\mathbf{g}_1}{\det(zI - F_1)} = \frac{2z + z^2}{z^3 + 2z^2 - z - 2} = \frac{z(z+2)}{(z+2)(z^2 - 1)}$$

Poiché Σ_1 *ha dimensione 3 ed è raggiungibile, mentre la f.d.t. in forma irriducibile ha denominatore del secondo ordine,* Σ_1 *non è osservabile e* -2 *è l'autovalore del sottosistema non osservabile di* Σ_1*.*
Il sistema serie non è osservabile, perché tale è uno dei sistemi che costituiscono la serie.
Il fattore $z+2$ *è comune al polinomio* $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)\mathbf{g}_1$ *e al polinomio* $\det(zI - F_2)$*, caratteristico della realizzazione minima* Σ_2 *di* $w_2(z)$*. Quindi il sistema serie di* Σ_1 *e di* Σ_2 *non è nemmeno raggiungibile, e* -2 *è autovalore del suo sottosistema non raggiungibile.*
(ii) Σ_1 *è raggiungibile, quindi al variare di* K_1 *il polinomio* $\det(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)$ *è un arbitrario polinomio di grado 3. Se esso non ha come fattori né* z*, né* $z+2$*, il sistema* $\Sigma_1^{(K_1)} = (F_1 + \mathbf{g}_1 K_1, \mathbf{g}_1, H_1)$ *è raggiungibile e osservabile, e può essere reso anche asintoticamente stabile allocandone gli autovalori entro il disco unitario, origine esclusa.*
Tuttavia il polinomio $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)\mathbf{g}_1$ *non dipende da* K_1 *e vale sempre* $z(z+2)$*. Quindi la serie di* $\Sigma_1^{(K_1)}$ *e di* Σ_2 *è non raggiungibile, qualunque sia* K_1*, e non è stabile, essendo* -2 *autovalore del suo sottosistema non raggiungibile.*

Qualunque sia $K_2 \neq 0$, l'instabilità del sistema globale permane. Infatti K_2 dà luogo ad una retroazione dallo stato all'ingresso del sistema serie (e non all'ingresso di Σ_2!), e tale retroazione lascia invariato l'autovalore (instabile) del sottosistema non raggiungibile. Quindi la risposta al quesito è negativa.

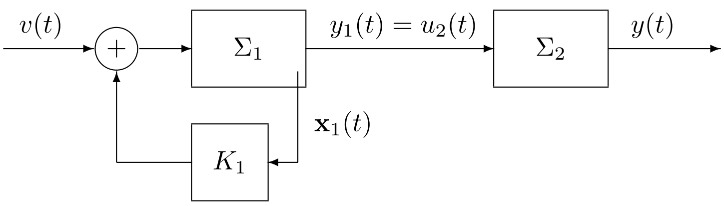
(iii) Sì: ad esempio, basta scegliere $K_2 = 0$ e K_1 in modo che $\det(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)$ non abbia zeri nell'origine e in -2 (ciò rende osservabile $\Sigma_1^{(K_1)}$) e nemmeno zeri in $-\frac{1}{2}$. Allora il sistema serie di $\Sigma_1^{(K_1)}$ e di Σ_2 è osservabile, quindi ammette stimatore asintotico.

Esercizio 1.2 Si considerino le funzioni di trasferimento

$$w_1(z) = \frac{z-2}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}, \quad w_2(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3}. \tag{1.3}$$

2_i Si costruiscano una realizzazione minima $\Sigma_1 = (F_1, \mathbf{g}_1, H_1)$ di $w_1(z)$ ed una minima $\Sigma_2 = (F_2, \mathbf{g}_2, H_2)$ di $w_2(z)$ e si determini se il sistema serie di Σ_1 seguito da Σ_2 è semplicemente stabile e/o osservabile.

2_{ii} Si costruisca per il sistema Σ_1 una retroazione K_1 dallo stato in modo che ogni evoluzione libera dello stato di Σ_1 sia periodica di periodo 3. Si determini se il sistema serie così ottenuto (cfr figura) è semplicemente stabile e/o osservabile.



2_{iii} Si determinino tutti gli stati iniziali del sistema serie, reazionato come al punto 2_{ii}, che danno luogo a uscite libere $y(t)$ di durata finita.

1_i*) Ricorrendo, p.es., a realizzazioni in forma canonica di controllo, si ha*

$$\Sigma_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad \Sigma_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Il primo sistema, e quindi la serie, risultano instabili (l'autovalore $\lambda = 1$ nella matrice F_1 ha molteplicità 3 nel polinomio minimo). La serie risulta osservabile, dato che i polinomi $\det(zI - F_1) = (z-1)^3$ e $H_2 \mathrm{adj}(zI - F_2)\mathbf{g}_2 = z^2 + z + 1$ sono coprimi.

2_{ii}*) Per ogni stato $\mathbf{x}_1$ deve risultare $(F_1 + \mathbf{g}_1 K_1)^3 \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$, quindi si deve avere $(F_1 + \mathbf{g}_1 K_1)^3 - I_3 = 0$. Allora il polinomio caratteristico di $(F_1 + \mathbf{g}_1 K_1)$ sarà $z^3 - 1$ e per ottenerlo dovremo assumere $K_1 = [\,0 \quad 3 \quad -3\,]$. Il nuovo sistema serie è semplicemente stabile (ha come autovalori semplici $1, e^{j2\pi/3}, e^{j4\pi/3}$ e 0 come autovalore a molteplicità 3) e non osservabile, essendo non coprimi i polinomi $\det(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1) = z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ e $H_2 \mathrm{adj}(zI - F_2)\mathbf{g}_2 = z^2 + z + 1$.*

2_{iii}*) Il sistema Σ_2 ha memoria finita ed è osservabile e raggiungibile, quindi*

- *le sue uscite libere hanno tutte durata finita e sono nulle solo se $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0}$*

- *le sue uscite forzate hanno durata finita solo nel caso in cui l'ingresso forzante $u_2(\cdot)$ [che è l'uscita libera di Σ_1 reazionato da K_1] può essere espresso come*

$$U_2(z) = Y_1^{\text{libera}}(z) = \frac{h(z)}{z^2+z+1}, \quad h(z) \in \mathbb{R}[z] \tag{1.4}$$

L'uscita libera è data da

$$\begin{aligned}
Y_1^{\text{libera}}(z) &= H_1(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)^{-1} z\mathbf{x}_1(0) = z\,[\,-2 \quad 1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ -1 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} \\
&= z\,[\,-2 \quad 1 \quad 0\,] \frac{\begin{bmatrix} z^2 & z & 1 \\ 1 & z^2 & z \\ z & 1 & z^2 \end{bmatrix}}{z^3-1} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} \\
&= \frac{(-2x_{11}+x_{12})z^3 + (-2x_{12}+x_{13})z^2 + (-2x_{13}+x_{11})z}{z^3-1} = \frac{p(z)}{z^3-1}
\end{aligned}$$

che assume la forma $\dfrac{h(z)}{z^2+z+1}$ *se $z-1$ divide $p(z)$, cioè se $p(1)=0$. Tale condizione è verificata se e solo se $x_{11}+x_{12}+x_{13}=0$, cioè sse è nulla la somma delle componenti di $\mathbf{x}_1(0)$.*
Gli stati che danno luogo a uscita $y_2(\cdot)$ di durata finita sono allora gli stati

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

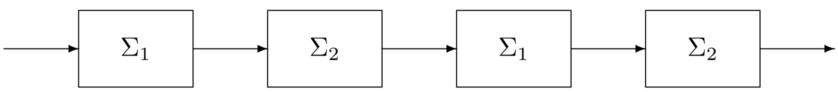
in cui è nulla la somma delle componenti di $\mathbf{x}_1(0)$.

Esercizio 1.3 (i) Si costruiscano due realizzazioni minime Σ_1 e Σ_2 rispettivamente di

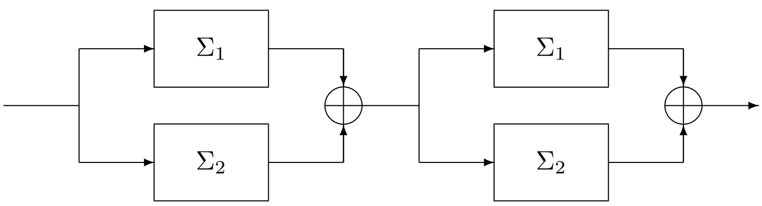
$$w_1(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1} = \frac{n_1(z)}{d_1(z)}, \quad w_2(z) = \frac{z-1}{z^2-z+1} = \frac{n_2(z)}{d_2(z)}. \tag{1.5}$$

Si stabilisca quali fra i seguenti sistemi sono raggiungibili e quali sono osservabili:

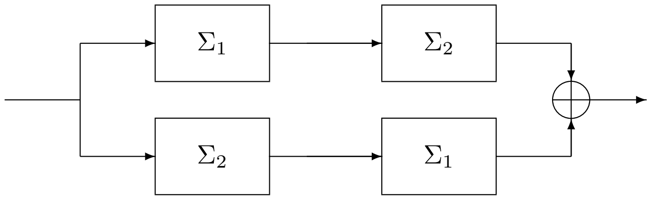
(ii)



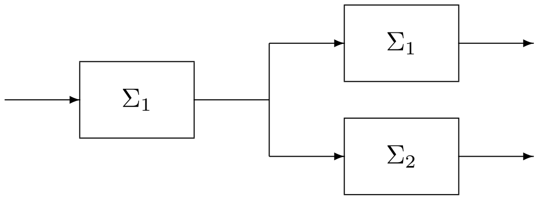
(iii)



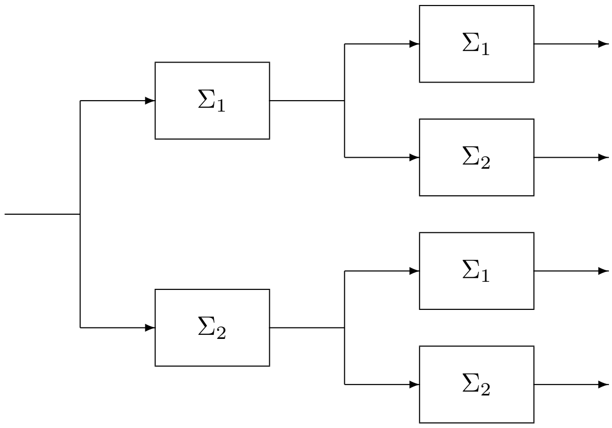
(iv)



(v)



(vi)



(i) I sistemi

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = [\,1 \quad 1\,] \\
F_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H_2 = [\,-1 \quad 1\,]
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

realizzano in dimensione 2 le funzioni di trasferimento date. La dimensione di realizzazione è minima, perché coincide con il grado del denominatore delle f.d.t. in una rappresentazione irriducibile.

(ii) Il sistema Σ_s , serie di Σ_1 e Σ_2, è minimo, non essendovi cancellazioni fra $\det(zI - F_1)$ *e* $H_2\mathrm{Adj}(zI - F_2)\mathbf{g}_2$*, né fra* $\det(zI - F_2)$ *e* $H_1\mathrm{Adj}(zI - F_1)\mathbf{g}_1$*. Basta ora notare che il sistema (ii) è la serie di due sistemi identici al sistema minimo Σ_s, quindi è raggiungibile e osservabile.*

(iii) Σ_p, parallelo di Σ_1 e di Σ_2, è raggiungibile e osservabile perchè gli spettri dei due sistemi minimi costituenti i rami di Σ_p sono disgiunti. Il sistema (iii) è la serie dei due sistemi eguali a Σ_p, quindi è raggiungibile e osservabile.

(iv) Il sistema (iv) consta del parallelo di due sistemi Σ_s. I rami del parallelo, essendo eguali, hanno quindi autovalori comuni. Il sistema (iv) non è quindi né raggiungibile, né osservabile.

(v) Il sistema ha un ingresso e due uscite. Sia la serie di Σ_1 seguito da Σ_1 che la serie di Σ_1 seguito da Σ_2 sono osservabili. Quindi dalle due uscite è osservabile lo stato del sistema complessivo.

Per la raggiungibilità, nulla cambia se le due uscite vengono sommate e il sistema diventa quindi la serie di Σ_1 e del parallelo Σ_p (che è raggiungibile e osservabile). Il sistema complessivo ha funzione di trasferimento

$$w(z) = \frac{n_1(z)}{d_1(z)} \, \frac{n_1(z)d_2(z) + n_2(z)d_1(z)}{d_1(z)d_2(z)}$$

Tale funzione razionale è in forma irriducibile: n_1 non ha cancellazioni con d_1 né con d_2 e negli zeri di d_1 e di d_2 il polinomio $n_1d_2 + n_2d_1$ non si può annullare. Il sistema interconnesso realizza $w(z)$ in dimensione 6, eguale appunto al grado del denominatore di una rappresentazione irriducibile di $w(z)$. Quindi il sistema (v) è minimo.

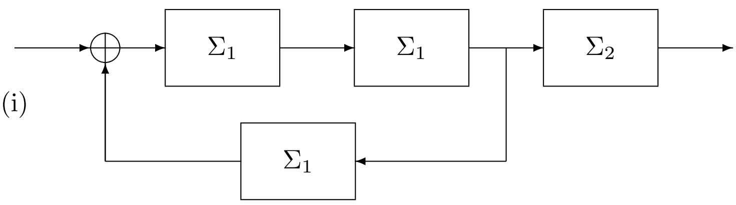
(vi) Il sistema ha un ingresso e 4 uscite. Dalle quattro uscite è osservabile lo stato di ciascuno dei 4 "rami" dell'albero e quindi lo stato complessivo.
Il sistema (vi) non è raggiungibile: "chiudendo" i paralleli di Σ_1 e Σ_2 si vede che ai fini della raggiungibilità il sistema (vi) equivale al parallelo di due sottosistemi:
Σ_1 in serie al parallelo Σ_p di Σ_1 e Σ_2,
Σ_2 in serie al parallelo Σ_p di Σ_1 e Σ_2.
I due sottosistemi hanno autovalori comuni (quelli dei due paralleli Σ_p), quindi non è raggiungibile il loro parallelo (e con esso il sistema (vi)).

Esercizio 1.4 Siano Σ_1 e Σ_2 due realizzazioni minime rispettivamente di

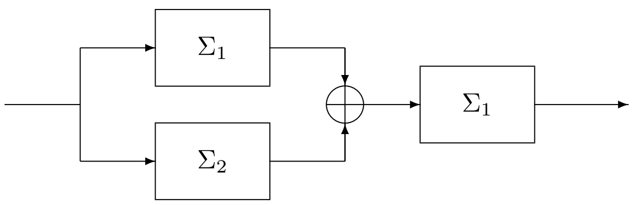
$$w_1(z) = \frac{z}{4z^2 + 4z + 1}, \qquad w_2(z) = \frac{2z + 1}{3z^2}. \tag{1.7}$$

Si studino la raggiungibilità e l'osservabilità delle seguenti connessioni:

(i)



(ii)



Soluzione Nel primo caso, la serie Σ_s di due sistemi minimi Σ_1 è a sua volta realizzazione minima di

$$w_s = \frac{z^2}{(2z+1)^4}.$$

La connessione Σ_f ottenuta dalla retroazione di Σ_s e di Σ_2 è ancora raggiungibile e osservabile, essendo realizzazione in dimensione 6 della f.d.t. irriducibile con denominatore del sesto grado:

$$w_f(z) = \frac{z^2(2z+1)^2}{(2z+1)^6 - z^3}$$

Infine la serie dei due sistemi minimi Σ_f e Σ_2 è osservabile ma non raggiungibile. Infatti si cancella il fattore z^2 fra il denominatore della f.d.t. irriducibile di Σ_2 e il numeratore della f.d.t. irriducibile di Σ_f, mentre non ci sono cancellazioni fra denominatore della f.d.t. irriducibile di Σ_f e il numeratore della f.d.t. irriducibile di Σ_2.

Nel secondo caso, il parallelo Σ_p di Σ_1 e di Σ_2 è raggiungibile e osservabile (spettri disgiunti!) ed ha f.d.t.irriducibile

$$w_p(z) = \frac{3z^3 + (2z+1)^3}{3z^2(2z+1)^2}$$

La serie di Σ_p con Σ_1 è allora non osservabile (cancellazione del fattore z fra il denominatore di $w_p(z)$ e il numeratore di $w_1(z)$), ma raggiungibile.

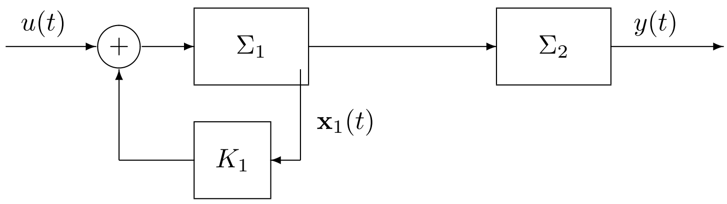
Esercizio 1.5 Siano dati i sistemi discreti $\Sigma_1 = (F_1, \mathbf{g}_1, H_1)$, con

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

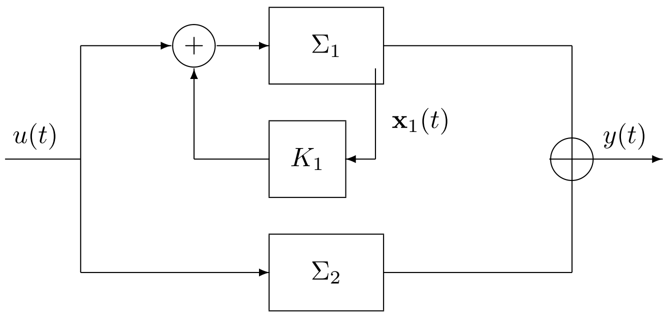
e $\Sigma_2 = (F_2, \mathbf{g}_2, H_2)$, realizzazione minima della funzione di trasferimento

$$w_2(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 - 1}.$$

Si considerino i seguenti schemi di connessione:



Schema S



Schema P

Per ciascuno degli schemi, si determini, quando possibile, la matrice di retroazione K_1 in modo che il sistema risultante dalla connessione sia

2.i) osservabile;

2.ii) raggiungibile;

2.iii) non osservabile e non raggiungibile;

2.iv) BIBO stabile;

2.v) internamente (asintoticamente) stabile.

Nei casi di impossibilità, si fornisca una concisa spiegazione.

Soluzione
Il sistema Σ_1 è in forma canonica di controllo, quindi è raggiungibile. D'altra parte la sua funzione di trasferimento è

$$w_1(z) = \frac{z^2-1}{z^4-1} = \frac{z^2-1}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{1}{z^2+1}$$

Poiché Σ_1 non è realizzazione minima, non è osservabile e gli autovalori del suo sottosistema non osservabile sono gli zeri di z^2-1.
La retroazione dallo stato alloca arbitrariamente gli autovalori di $F_1 + \mathbf{g}_1 K_1$ e consente quindi di ottenere, per il sistema Σ_1 retroazionato da K_1, che denoteremo con Σ_{1,K_1}, tutte e sole le f.d.t.

$$\frac{z^2-1}{p(z)},$$

con $p(z)$ polinomio monico arbitrario di quarto grado. Si noti che Σ_{1,K_1} è comunque raggiungibile, ed è osservabile se $p(z)$ e z^2-1 sono coprimi.

Schema S

2.i) *Occorre e basta scegliere K_1 in modo che*

- *$p(z) = \det(zI_4 - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)$ sia coprimo con z^2-1 ($\Leftrightarrow$ Σ_{1,K_1} osservabile)*
- *$p(z)$ sia coprimo con $z-\frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow$ mancanza di cancellazioni fra $\det(zI_4 - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)$ e $H_2 \mathrm{adj}(zI - F_2)\mathbf{g}_2$*

Ad esempio, si può scegliere $K_1 = [\,-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$, in modo da avere $p(z) = z^4$

2.ii) *Qualunque retroazione K_1 si adotti, il polinomio $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)\mathbf{g}_1$ rimane invariato e vale z^2-1 Quindi in ogni caso si ha una cancellazione fra tale polinomio e il polinomio caratteristico di Σ_2. Lo schema S non è mai raggiungibile.*

2.iii) *Basta lasciare le cose come stanno, i.e. scegliere $K_1 = 0$. Il sistema Σ_1 è non osservabile e si ha una cancellazione fra $H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)\mathbf{g}_1$ e $\det(zI - F_2)$. Quindi lo schema S è non osservabile e non raggiungibile.*

2.iv) *La funzione di trasferimento dello schema S vale*

$$\frac{(z^2-1)(z-\frac{1}{2})}{p(z)(z^2-1)} = \frac{z-\frac{1}{2}}{p(z)}$$

Basta scegliere $p(z)$ con zeri a modulo minore di 1 (ad esempio, $p(z) = z^4$, e quindi $K_1 = [\,-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$) per ottenere un sistema BIBO stabile.

2.v) *Fra gli autovalori dello schema S sono comunque presenti gli autovalori ± 1 del sistema Σ_2: quindi lo schema non può mai essere asintoticamente stabile.*

Schema P

2.i) *Occorre che Σ_{1,K_1} sia osservabile e che i suoi autovalori (ovvero, quando si sia ottenuta l'osservabilità, i suoi poli) non siano autovalori di Σ_2. Occorre e basta scegliere K_1 in modo che*

$p(z) = \det(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)$ sia coprimo con $z^2 - 1$, numeratore della f.d.t. di Σ_1 (osservabilità di Σ_{1,K_1}) ma anche polinomio caratteristico del sistema Σ_2 (assenza di autovalori comuni fra Σ_{1,K_1} e Σ_2)
La scelta $p(z) = z^4$ e quindi $K_1 = [\,-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$ va bene anche in questo caso.

2.ii) *I sistemi Σ_{1,K_1} e Σ_2 sono entrambi raggiungibili; per la raggiungibilità dello schema P basta quindi che i loro polinomi caratteristici siano coprimi, ovvero che non ci siano zeri comuni fra $z^2 - 1$ e $p(z) = \det(zI - F_1 - \mathbf{g}_1 K_1)$.*
Basta scegliere $p(z) = z^4$, ovvero $K_1 = [\,-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$.

2.iii) *Scegliendo $K_1 = 0$, i due sistemi in parallelo hanno in comune gli autovalori 1 e -1, ovvero gli zeri di $z^2 - 1$. Allora lo schema P non è né raggiungibile, né osservabile.*

2.iv) *La funzione di trasferimento dello schema P vale*

$$w_P(z) = \frac{z^2-1}{p(z)} + \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2-1} = \frac{(z^2-1)^2 + p(z)(z-\frac{1}{2})}{p(z)(z^2-1)} = \frac{(z-1)^2(z+1)^2 + p(z)(z-\frac{1}{2})}{p(z)(z-1)(z+1)}$$

Qualunque sia $p(z)$, la molteplicità del fattore $z - 1$ a denominatore eccede la molteplicità a numeratore, quindi in $w_P(z)$ il polo in $z = 1$ è presente qualunque scelta si faccia per il polinomio monico di quarto grado $p(z)$. Pertanto lo schema P non è BIBO stabile, qualunque scelta si faccia per K_1.

2.v) *Poichè lo schema P non è BIBO stabile per nessuna scelta di K_1, non può nemmeno essere asintoticamente stabile. (In alternativa, poichè Σ_2 ha autovalori a modulo unitario, l'intero schema parallelo ha autovalori a modulo unitario,etc.)*

Esercizio 1.6 Se il sistema Σ è realizzazione minima della funzione di trasferimento

$$w(z) = \frac{z}{z^3+z^2+1} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

2.i) si determini, al variare di k, la funzione di trasferimento del sistema interconnesso di figura 2.1, in cui sono presenti $k \geq 1$ sistemi Σ nella catena di retroazione.

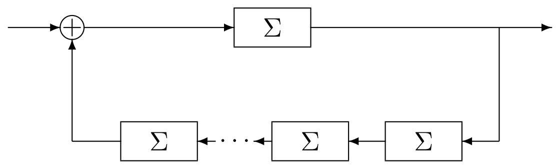


Figura 2.1

2.ii) si stabilisca se il sistema interconnesso di figura 2.2 è raggiungibile e/o osservabile

2.iii) si determini, al variare di k, la funzione di trasferimento del sistema interconnesso di figura 2.2, in cui sono presenti $k \geq 1$ sistemi Σ in retroazione.

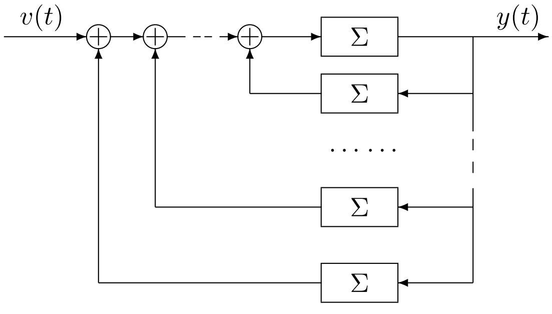


Figura 2.2

2.iv) si studi la raggiungibilità e l'osservabiltà della connessione di figura 2.2.

SOLUZIONE

2.i) Posto $b(z) = z$ *e* $a(z) = z^3 + z^2 + 1$*, se le copie di* Σ *nella catena di retroazione sono* k*, la f.d.t. della catena di retroazione è* $b(z)^k/a(z)^k$ *e quella del sistema di figura 2.1. è*

$$\frac{b(z)a(z)^k}{a(z)^{k+1} - b(z)^{k+1}} \tag{1.8}$$

2.ii) La frazione (1.8) è irriducibile. Infatti sia negli zeri di $a(z)$ *che in quelli di* $b(z)$ *(ossia negli zeri del numeratore) il denominatore è diverso da zero. Inoltre il denominatore ha grado* $3(k+1)$*, eguale alla dimensione del sistema interconnesso di figura 2.1 che realizza (1.8). Poichè una f.d.t. in forma irriducibile ha realizzazione minima di dimensione eguale al grado del denominatore, il sistema di fig.2.2 è realizzazione minima di (1.8), quindi è raggiungibile e osservabile.*

2.iii) È chiaro che lo schema di figura 2.2 prevede in retroazione il parallelo di k *sistemi eguali. Tale parallelo ha funzione di trasferimento* $\frac{kb(z)}{a(z)}$ *e di conseguenza la f.d.t. del sistema interconnesso di figura 2.2. è*

$$\frac{b(z)a(z)}{a(z)^2 - kb(z)^2}\ ,$$

espressa in forma irriducibile.

2.iv) Se $k = 1$*, il sistema complessivo ha dimensione 6, eguale al grado del denominatore della sua f.d.t. in forma irriducibile. Quindi è minimo, ovvero raggiungibile e osservabile.*
Se $k > 1$*, il sistema interconnesso di figura 2.2. ha dimensione* $3(k+1)$ *maggiore di 6, che è il grado del denominatore della sua f.d.t. Quindi il sistema non è minimo. Possiamo anche affermare che non è né raggiungibile, né osservabile, dato che non è né raggiungibile, né osservabile il sistema in retroazione (parallelo di più sistemi eguali).*

Esercizio 1.7 Si consideri una funzione di trasferimento espressa in forma irriducibile

$$w(z) = \frac{n(z)}{d(z)}, \qquad \deg d(z) = 4,\ \deg n(z) = 2$$

e siano Σ e $\tilde{\Sigma}$ realizzazioni minime rispettivamente di $w(z)$ e di $-w(z)$

2.i) si determinino, in forma irriducibile, le funzioni di trasferimeno dei sistemi interconnessi Σ_1 e Σ_2 di figura 2.1;

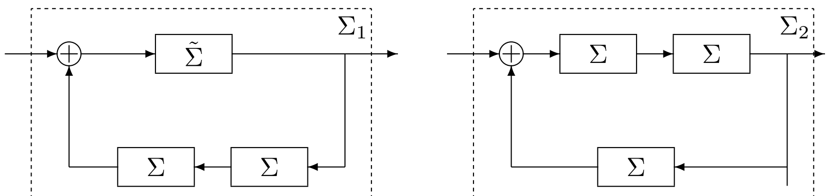


Figura 2.1

2.ii) si stabilisca (giustificandolo) se ciascuno dei sistemi interconnessi Σ_1 e Σ_2 è raggiungibile e/o osservabile;

2.iii) si stabilisca (giustificandolo) se il parallelo di Σ_1 e di Σ_2 è raggiungibile e/o osservabile.
In caso negativo, si determini qual è la dimensione minima di realizzazione della funzione di trasferimento del parallelo di Σ_1 e Σ_2.

Soluzione]

2.i.) Le funzioni di trasferimento di Σ_1 e di Σ_2 sono rispettivamente

$$w_1(z) = \frac{-n(z)d^2(z)}{d^3(z)+n^3(z)}, \qquad w_2(z) = \frac{n^2(z)d(z)}{d^3(z)-n^3(z)} \tag{1.9}$$

È immediato che entrambe le rappresentazioni (1.9) di $w_1(z)$ e $w_2(z)$ sono irriducibili: dove $n(z)$ si annulla, non si annulla $d(z)$ e, viceversa, dove $d(z)$ si annulla, non si annulla $d(z)$. Quindi i denominatori $d^3(z) \pm n^3(z)$ non possono annullarsi nei punti in cui si annullano i numeratori di (1.9).

2.ii.) Il denominatore di entrambe le rappresentazioni irriducibili (1.9) ha grado 12. Poiché la dimensione dello spazio di stato dei sistemi Σ_1 e Σ_2, che realizzano $w_1(z)$ e $w_2(z)$, è 12, ciascuno dei sistemi Σ_1 e Σ_2 è una realizzazione minima della propria f.d.t., quindi è raggiungibile e osservabile.

2.iii.) Gli autovalori di Σ_1 e di Σ_2 sono, rispettivamente, gli zeri di $d^3(z)+n^3(z)$ e di $d^3(z)-n^3(z)$. I due polinomi non hanno zeri comuni: infatti, se fosse

$$\begin{aligned} d^3(\alpha)+n^3(\alpha) &= 0 \\ d^3(\alpha)-n^3(\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

sommando le equazioni si otterrebbe $d^3(\alpha)=0$ e sottraendole $n^3(\alpha)=0$. Ma allora α sarebbe zero comune di $d(z)$ e $n(z)$, impossibile perché $d(z)$ e $n(z)$ sono coprimi.

Poiché i sistemi Σ_1 e Σ_2 non hanno autovalori comuni e sono entrambi raggiungibili e osservabili, tale è anche il loro parallelo.

2. CONTROLLO OTTIMO

Esercizio 2.1. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.11}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(u^2(t) + \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) \right), \quad Q = \bar{C}^T \bar{C}, \quad \bar{C} = [\, 0 \quad 1 \quad \alpha \,], \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

Evidenziando, eventualmente, i valori di α per cui la risposta è affermativa, si stabilisca se

- 3_i esiste, per ogni scelta dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$, il controllo ottimo che minimizza l'indice quadratico;
- 3_{ii} esistono stati iniziali non nulli in corrispondenza ai quali è nullo il valore minimo dell'indice e, in caso affermativo, si determinino tutti gli stati iniziali per cui risulta $\min_u J(u, \mathbf{x}_0) = 0$;
- 3_{iii} la matrice di retroazione K_∞ che induce il controllo ottimo $u_{\text{ot}} = K_\infty \mathbf{x}$ stabilizza il sistema (si giustifichi la risposta).
- 3^*_{iv} Per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determinino la soluzione "ottimizzante" M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati e la matrice di retroazione K_∞. Per quali valori di α la matrice $F + GK_\infty$ è nilpotente?

(i) Il sistema è raggiungibile, indipendentemente da α, quindi è stabilizzabile, quindi il minimo dell'indice esiste finito per ogni stato iniziale.

(ii) Qualunque sia α, la coppia $(F, \bar{C})$ non è osservabile, quindi M_∞ non è definita, ma soltanto semidefinita positiva. La matrice di osservabilità delle coppia è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0, \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

il cui nucleo (ovvero il sottospazio non osservabile della coppia $(F, \bar{C})$) ha come generatore il vettore canonico $\mathbf{e}_1$. La forma quadratica $\mathbf{x}_0^T M_\infty \mathbf{x}_0$, che fornisce il valore minimo dell'indice quando lo stato iniziale è $\mathbf{x}_0$, si annulla se e solo se $\mathbf{x}_0$ appartiene al sottospazio non osservabile, quindi sse $\mathbf{x}_0 = \beta \mathbf{e}_1$.

(iii) K_∞ stabilizza il sistema, qualunque sia α. Infatti , indipendentemente da α, la coppia $(F, \bar{C})$ è rivelabile (F è nilpotente, quindi l'unico autovalore del sottosistema non osservabile è lo zero!)

(iv) Ponendo $M(0) = 0$ nell'equazione alle differenze di Riccati, si ottiene

$$M(-1) = Q = \bar{C}^T \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}, \quad M(-2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & * \end{bmatrix}, \quad M(-3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & * \end{bmatrix}$$

Si verifica allora facilmente, per induzione, che per ogni $k \leq -1$

$$M(-k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & * \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

Quindi la soluzione $M_\infty = \lim_{k\to\infty} M(-k)$ *dell'equazione algebrica di Riccati (EAR), sarà una matrice semidefinita positiva con struttura*

$$M_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & y \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Il valore di y *si ottiene sostituendo (1.15) in (EAR). Imponendo l'eguaglianza fra gli elementi in posizione* $(3,3)$ *a primo e secondo membro di*

$$M_\infty = Q + F^T M_\infty F - F^T M_\infty \mathbf{g}(R + \mathbf{g}^T M_\infty \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T M_\infty F$$

si ha

$$y = \alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{1+y} \tag{1.16}$$

o, equivalentemente, $y^2 - \alpha^2 y - 1 = 0$. *Scartando la soluzione negativa (altrimenti* M_∞ *non risulterebbe s.d.p.) , si ricava*

$$y = \frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + 1} \tag{1.17}$$

e infine

$$K_\infty = -(R + \mathbf{g}^T M_\infty \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T M_\infty F = [\, k_0 \quad k_1 \quad k_2 \,] = \left[0 \quad 0 \quad -\alpha \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + 1} \right)^{-1} \right] \tag{1.18}$$

Si conclude che

$$F + \mathbf{g} K_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

è nilpotente se e solo se $k_2 = 0$, *ossia se e solo se* $\alpha = 0$.

Esercizio 2.2. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.20}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^2(t) + \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) \right), \quad Q = C^T C, \quad C = [\, c_1 \quad c_2 \,] \tag{1.21}$$

3_i Si determini la matrice C in modo che la matrice di retroazione K_∞ che risolve il problema di minimizzare $J(u, \mathbf{x}_0)$ **non** stabilizzi il sistema.

3_{ii} Esistono matrici C tali che l'equazione algebrica di Riccati non ammetta soluzioni M_s stabilizzanti? In caso affermativo, si determini la struttura di siffatte C.

3_{iii} Scelta C in modo che $F + \mathbf{g}K_\infty$ sia asintoticamente stabile, si determini una matrice s.d.p. P tale che, per ogni stato $\mathbf{x}_0$, si abbia

$$\mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{x}_0^T M_\infty \mathbf{x}_0.$$

3_i) La raggiungibilità della coppia $F, \mathbf{g}$ garantisce che il controllo ottimo esiste. La matrice K_∞ non è stabilizzante se e solo se la coppia (F, C) non è rivelabile. La matrice PBH di osservabilità

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -3 & z+2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

può avere rango minore di 2 soltanto in corrispondenza ai valori di z che sono autovalori di F, quindi in 1 e in -3. Affinché il rango sia effettivamente minore di 2 occorre inoltre che la matrice C per $z = -3$ oppure per $z = 1$ sia, rispettivamente,

$$\begin{array}{rcl} C = \alpha\,[\,-3 \quad -1\,] & := & C_{-3}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ C \;=\; \alpha\,[\,1 \quad -1\,] & := & C_1, \quad\;\; \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \tag{1.23}$$

In entrambi i casi il sottosistema non osservabile ha un autovalore in modulo maggiore o eguale a 1, e quindi la coppia (F, C) non è rivelabile.

3_{ii}) L'equazione di Riccati non ammette soluzioni stabilizzanti se e solo se (1.36) ha rango non pieno per qualche valore $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Ciò si verifica scegliendo $C = C_1$.

3_{iii}) Scegliamo, ad esempio, $C = \bar{C} = [\,1 \quad 1\,]$. Si ha $Q = \bar{C}^T \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $F + \mathbf{g}K_\infty$ risulta asintoticamente stabile perchè la coppia $(F, \bar{C})$ è osservabile.
Consideriamo inoltre un' arbitraria matrice di retroazione K che stabilizza il sistema dato, p.es. la matrice $K = [\,-3 \quad 2\,]$ per cui $F + \mathbf{g}K$ è nilpotente. Il valore dell'indice $J(u, \mathbf{x}_0)$ corrispondente all'ingresso di retroazione $u(t) = K\mathbf{x}(t)$ è certamente non inferiore all'ottimo $\mathbf{x}_0^T M_\infty \mathbf{x}_0$, ed è dato da $\mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0$, dove P è la soluzione semidefinita positiva dell'equazione di Lyapunov

$$(F + \mathbf{g}K)^T X (F + \mathbf{g}K) - X = -(K^T R K + Q) \tag{1.24}$$

Posto $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$ e sostituendo i valori per le altre matrici, (1.38) diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} [\,-3 \quad 2\,] - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e la soluzione è

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.3. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.25}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^2(t) + \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) \right), \quad Q = C^T C, \quad C = [\,1 \quad 1\,] \tag{1.26}$$

(i) Esistono stati iniziali non nulli in corrispondenza ai quali il valore minimo dell'indice J è nullo? In caso affermativo, si richiede di determinarli tutti.

(ii) Si costruisca un dead-beat controller K per la coppia $(F, \mathbf{g})$. Se per il sistema così retroazionato

$$\mathbf{x}(t+1) = (F + \mathbf{g}K)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) = \tilde{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.27}$$

viene adottato l'indice quadratico (1.26), esistono stati iniziali non nulli in corrispondenza ai quali il valore minimo dell'indice è nullo?

(iii) Per il sistema $(\tilde{F}, \mathbf{g})$ dato in (1.27) e con indice (1.26), si determinino la soluzione M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati e la corrispondente matrice di retroazione K_∞.

(iv) Per il sistema (1.27) si determini il valore di $J(0, \mathbf{x}_0)$ in corrispondenza ad ogni stato iniziale $\mathbf{x}_0$, e si verifichi che vale la diseguaglianza

$$J(0, \mathbf{x}_0) \geq \mathbf{x}_0^T M_\infty \mathbf{x}_0. \tag{1.28}$$

Per quali stati iniziali la diseguaglianza vale in senso stretto?

(i) La coppia (F, C) non è osservabile. Il valore minimo dell'indice è nullo in corrispondenza a tutti gli stati non osservabili della coppia , ovvero a tutte le soluzioni dell'equazione

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

Gli stati cercati sono del tipo

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii) Il controllore d.b. è $K = [\,-1 \quad 0\,]$: in corrispondenza si ha $\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e la coppia $(\tilde{F}, C)$ è osservabile. Quindi in corrispondenza ad ogni stato iniziale non nullo il valore minimo dell'indice per il sistema $(\tilde{F}, \mathbf{g})$ è strettamente positivo.

(iii) La matrice M_∞ è la soluzione definita positiva dell'equazione algebrica di Riccati

$$X = Q + F^T X F - F^T X \mathbf{g}(R + \mathbf{g}^T X \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T X F.$$

Posto $X = \begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix}$, si perviene all'equazione

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} (1+q)^{-1} [\,0 \quad s\,] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - (1+q)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

che equivale al sistema

$$\begin{aligned}
p &= 1 \\
s &= 1 \\
q &= 1 + p - \frac{s^2}{1+q}
\end{aligned}$$

La componente q soddisfa l'equazione $q^2 - q - 1 = 0$, che ha per soluzioni $q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$. Poiché la matrice M_∞ cercata deve essere d.p., delle due soluzioni va scelta la positiva:

$$q = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{5}]$$

ottenendo così

$$M_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{bmatrix}.$$

Il controllo ottimo è l'ingresso di retroazione prodotto dalla matrice

$$K_\infty = -(R + \mathbf{g}^T M_\infty \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T M_\infty F = -\left(1 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{-1} [\,0 \quad 1\,] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-2}{3+\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(iv) La matrice di aggiornamento di stato

$$\tilde{F} + \mathbf{g}K_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-2}{3+\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

è asintoticamente stabile. Il valore minimo dell'indice è

$$J(u_{\text{ot}}, \mathbf{x}_0) = [\,x_{01} \quad x_{02}\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = x_{01}^2 + 2x_{01}x_{02} + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x_{02}^2 \sim x_{01}^2 + 2x_{01}x_{02} + 1.62x_{02}^2$$

mentre in evoluzione libera l'indice assume il valore

$$J(0, \mathbf{x}_0) = [\,x_{01} \quad x_{02}\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + [\,x_{02} \quad 0\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{02} \\ 0 \end{bmatrix} = x_{01}^2 + 2x_{01}x_{02} + 2x_{02}^2$$

Evidentemente si ha sempre $J(0, \mathbf{x}_0) \geq J(u_{\text{ot}}, \mathbf{x}_0)$ e l'eguaglianza si ha per gli stati iniziali con $x_{02} = 0$.

Esercizio 2.4. Si consideri il sistema discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) &= [\,1 \quad 0\,]\,\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1.29}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^2(t) + y^2(t)\right), \tag{1.30}$$

(i) Il controllo ottimo $u_{\text{ot}}(\cdot)$ che minimizza l'indice quadratico è stabilizzante?

(ii) Si calcolino

- la soluzione ottimizzante M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati,
- la corrispondente matrice di reatroazione K_∞,

e si verifichi sullo spettro di $F + \mathbf{g}K_\infty$ quanto affermato al punto precedente;

(iii) per quali stati iniziali $\mathbf{x}_0$ è nullo il valore minimo dell'indice $\min_u J(u, \mathbf{x}_0)$?

Soluzione *Si noti che nel problema di controllo ottimo in considerazione l'indice ha matrici* $R = 1$ *e* $Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La coppia $(F, \mathbf{g})$ *è raggiungibile, quindi stabilizzabile, mentre la coppia* (F, C) *è in forma standard di osservabilità (quindi non è osservabile) e poiché il sottosistema non osservabile ha autovalore 3, la coppia* (F, C) *non è rivelabile.*

(i) La risposta è negativa, dato che (F, C) *non è rivelabile.*

(ii) L'equazione alle differenze di Riccati

$$\begin{aligned} M(-t-1) &= Q + F^T M(-t) F - F^T M(-t)\mathbf{g}(R + \mathbf{g}^T M(-t)\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g} M(-t) F \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} M(-t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} M(-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1 + [1 \quad 1] M(-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} [1 \quad 1] M(-t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

se inizializzata da $M(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *ha per ogni* $t > 0$ *una soluzione con struttura*

$$M(-t) = \begin{bmatrix} m_{11}(-t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi anche $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M(-t)$ *ha diversa da zero solo la componente di posizione* $(1, 1)$. *Essendo* M_∞ *una soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati*

$$M = Q + F^T M F - F^T M\mathbf{g}(R + \mathbf{g}^T M\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g} M F,$$

ponendo $M = M_\infty = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *si perviene all'equazione*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1 + [1 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$m = 1 + m - \frac{m^2}{1+m}$$

e infine $m^2 - m - 1 = 0$, *che ha per soluzioni* $m = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. *La condizione che* M_∞ *sia semidefinita positiva impone di scegliere la soluzione positiva, pervenendo a*

$$M_\infty = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice K_∞ *è allora*

$$K_\infty = -(R + \mathbf{g}^T M_\infty \mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}^T M_\infty F = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^{-1} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \quad -\frac{2}{3+\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

da cui

$$F + \mathbf{g}K_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \star & 3 \end{bmatrix},$$

che ha un autovalore instabile.

(iii) il valore minimo dell'indice è zero in corrispondenza agli stati iniziali $\mathbf{x}_0$ che appartengono allo spazio non osservabile della coppia (F, C), quindi a tutti gli stati proporzionali al vettore canonico $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2.5. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.32}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(u^2(t) + \mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)\right), \quad Q = Q^T \text{ s.d.p.}$$

i) Esiste, per ogni scelta dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e di Q s.d.p,. il controllo ottimo che minimizza l'indice quadratico?

ii) Se
$$Q = \bar{C}^T\bar{C}, \quad \bar{C} = [\,1 \quad 1 \quad 1\,],$$
esistono stati iniziali non nulli cui corrisponde un controllo ottimo $u_{\rm ot}(\cdot)$ identicamente nullo? In caso affermativo, si determinino tutti gli stati iniziali cui corrisponde un controllo ottimo identicamente nullo e qual è il valore corrispondente dell'indice quadratico.

iii) Se $Q = \bar{C}^T\bar{C}$, la matrice di retroazione K_∞ che induce il controllo ottimo $u_{\rm ot} = K_\infty \mathbf{x}$ stabilizza il sistema? [si giustifichi la risposta]

iv) Si determini la matrice M_∞ che risolve il problema di controllo ottimo quando $Q = \bar{C}^T\bar{C}$.

Soluzione
i) *Il sistema è raggiungibile, quindi stabilizzabile, quindi il controllo ottimo esiste.*

ii) *Il sistema $(F, \bar{C})$ non è osservabile, quindi la matrice M_∞ non è definita positiva ed esistono stati iniziali cui corrisponde controllo ottimo nullo. Si tratta di tutti e soli gli stati non osservabili della coppia $(F, \bar{C})$, che ha matrice di osservabilità*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}F \\ \bar{C}F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

Il sottospazio non osservabile è costituito allora da tutti i vettori per i quali è nulla la somma delle componenti, ed ha come base, p.es., i vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

iii) *Gli autovalori del sottosistema non osservabile di $(F, \bar{C})$ hanno modulo unitario, perché hanno modulo unitario tutti gli autovalori di F [si può verificare che il sottosistema non osservabile ha autovalori $e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$, ma tale verifica non è necessaria per trarre le conclusioni che ci servono: ci basta sapere che gli autovalori hanno modulo unitario]. Quindi K_∞ non è stabilizzante, e in questo caso l'equazione algebrica di Riccati non ammette neppure una soluzione stabilizzante diversa da quella ottima.*

iv) *Si noti che*

$$F^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T F = F^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g}\mathbf{g}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T F = \mathbf{1}\mathbf{1}^T.$$

Allora, assumendo $M(0) = 0$, l'equazione alle differenze di Riccati ha soluzioni

$$\begin{aligned}
M(-1) &= \mathbf{1}\mathbf{1}^T \\
M(-2) &= \mathbf{1}\mathbf{1}^T + F^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T F - (1+\mathbf{g}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g})^{-1}F^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g}\mathbf{g}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T F \\
&= \mathbf{1}\mathbf{1}^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T - (1+\mathbf{g}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g})^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \frac{3}{2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T
\end{aligned}$$

e, assumendo induttivamente $M(-t) = \alpha(-t)\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ si ricava

$$\begin{aligned}
M(-t-1) &= \mathbf{1}\mathbf{1}^T + \alpha(-t)F^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T F - (1+\alpha(-t)\mathbf{g}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g})^{-1}\alpha^2(-t)F^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g}\mathbf{g}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T F \\
&= (1+\alpha(-t))\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \frac{\alpha^2(-t)}{1+\alpha(-t)}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \\
&= \frac{1+2\alpha(-t)}{1+\alpha(-t)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \alpha(-t-1)\mathbf{1}\mathbf{1}^T
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Tutte le matrici $M(-t)$ sono proporzionali alla matrice $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ e lo stesso vale allora per la matrice limite M_∞, che sappiamo esistere, ed essere s.d.p.
Si può allora impostare l'equazione algebrica di Riccati, vincolando la soluzione cercata a essere del tipo $\alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T$:

$$\begin{aligned}
\alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T &= \mathbf{1}\mathbf{1}^T + F^T\alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T F - (1+\mathbf{g}^T\alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g})^{-1}F^T\alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{g}\mathbf{g}^T\alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T F \\
&= \mathbf{1}\mathbf{1}^T + \alpha\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \frac{\alpha^2}{1+\alpha}\mathbf{1}\mathbf{1}^T
\end{aligned}$$

Si perviene all'equazione $1+\alpha-\alpha^2 = 0$, che ha un'unica soluzione positiva α_+, e si trova

$$M_\infty = \alpha_+\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

In alternativa, si può osservare che in (1.33) la successione $\alpha(-t)$, $t = 1, 2, \ldots$, inizializzata da $\alpha(-1) = 1$, è crescente e nessun suo elemento supera il valore 2. Quindi essa converge, al divergere di t, ad un limite positivo α_∞ che risolve l'equazione

$$\alpha_\infty = \frac{1+2\alpha_\infty}{1+\alpha_\infty}$$

ovvero a $\alpha_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La soluzione dell'equazione di Riccati è data da

$$M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M(-t) = \lim_{t\to+\infty}\alpha(-t)\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

Esercizio 2.6. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.34}$$

e l'indice quadratico

$$J(u,\mathbf{x}_0)=\sum_{t=0}^{+\infty}\left(u^2(t)+\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)\right), \quad Q=C^TC, \quad C=[\,c_1 \quad c_2\,] \tag{1.35}$$

i Si determini la matrice C in modo che la matrice di retroazione K_∞ che risolve il problema di minimizzare $J(u,\mathbf{x}_0)$ **non** stabilizzi il sistema.

ii Esistono matrici C tali che l'equazione algebrica di Riccati non ammetta soluzioni M_s stabilizzanti? In caso affermativo, si determini la struttura di siffatte C.

iii Scelta C in modo che $F+\mathbf{g}K_\infty$ sia asintoticamente stabile, si determini una matrice s.d.p. P tale che, per ogni stato $\mathbf{x}_0$, si abbia

$$\mathbf{x}_0^TP\mathbf{x}_0\geq\mathbf{x}_0^TM_\infty\mathbf{x}_0.$$

i) La raggiungibilità della coppia $F,\mathbf{g}$ garantisce che il controllo ottimo esiste. La matrice K_∞ non è stabilizzante se e solo se la coppia (F,C) non è rivelabile. La matrice PBH di osservabilità

$$\begin{bmatrix} zI-F \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z & -1 \\ -3 & z+2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

può avere rango minore di 2 soltanto in corrispondenza ai valori di z che sono autovalori di F, quindi in 1 e in -3. Affinché il rango sia effettivamente minore di 2 occorre inoltre che la matrice C per $z=-3$ oppure per $z=1$ sia, rispettivamente,

$$\begin{array}{rcl} C=\alpha\,[\,-3 \quad -1\,] & := & C_{-3}, \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ C \;=\; \alpha\,[\,1 \quad -1\,] & := & C_1, \qquad \alpha\in\mathbb{R} \end{array} \tag{1.37}$$

In entrambi i casi il sottosistema non osservabile ha un autovalore in modulo maggiore o eguale a 1, e quindi la coppia (F,C) non è rivelabile.

ii) L'equazione di Riccati non ammette soluzioni stabilizzanti se e solo se (1.36) ha rango non pieno per qualche valore $z\in\mathbb{C}$ con $|z|=1$. Ciò si verifica scegliendo $C=C_1$.

iii) Scegliamo, ad esempio, $C=\bar{C}=[\,1 \quad 1\,]$. Si ha $Q=\bar{C}^T\bar{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $F+\mathbf{g}K_\infty$ risulta asintoticamente stabile perchè la coppia $(F,\bar{C})$ è osservabile.
Consideriamo inoltre un' arbitraria matrice di retroazione K che stabilizza il sistema dato, p.es. la matrice $K=[\,-3 \quad 2\,]$ per cui $F+\mathbf{g}K$ è nilpotente. Il valore dell'indice $J(u,\mathbf{x}_0)$ corrispondente all'ingresso di retroazione $u(t)=K\mathbf{x}(t)$ è certamente non inferiore all'ottimo $\mathbf{x}_0^TM_\infty\mathbf{x}_0$, ed è dato da $\mathbf{x}_0^TP\mathbf{x}_0$, dove P è la soluzione semidefinita positiva dell'equazione di Lyapunov

$$(F+\mathbf{g}K)^TX(F+\mathbf{g}K)-X=-(K^TRK+Q) \tag{1.38}$$

Posto $P=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$ e sostituendo i valori per le altre matrici, (1.38) diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}[\,-3 \quad 2\,]-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e la soluzione è

$$P=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.7. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.39}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(u^2(t) + \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) \right), \quad Q = C^T C, \quad C = [\, c_1 \quad c_2 \,] \tag{1.40}$$

3.i) Si determini per quali valori di C la matrice di retroazione K_∞ che risolve il problema di minimizzare $J(u, \mathbf{x}_0)$ **non** stabilizza il sistema.

3.ii) Esistono matrici C tali che l'equazione algebrica di Riccati non ammetta soluzioni M_s stabilizzanti? In caso affermativo, si determini la struttura di siffatte C.

3.iii) Scelta C in modo che $F + \mathbf{g}K_\infty$ sia asintoticamente stabile, si determini, senza valutare M_∞, una matrice s.d.p. P tale che

$$P - M_\infty$$

sia semidefinita positiva.

3.iv) Scelta C in modo che $F + \mathbf{g}K_\infty$ sia asintoticamente stabile, per quali stati iniziali $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ la legge di controllo ottimo K_∞ porta lo stato a zero in un numero finito di passi?

SOLUZIONE

3.i) Il sistema è in forma canonica di raggiungibilità e F ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Perchè il controllo ottimo non sia stabilizzante occorre e basta che la coppia (F, C) non sia rivelabile. Poiché entrambi gli autovalori di F hanno modulo maggiore o eguale a 1, occorre e basta rendere non osservabile la coppia, i.e. scegliere $C = [\, c_1 \quad c_2 \,]$ in modo da soddisfare la condizione

$$0 = \det \begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -3c_2 & c_1 - 4c_2 \end{bmatrix} = c_1^2 - 4c_1c_2 + 3c_2^2 = (c_1 - c_2)(c_1 - 3c_2)$$

Il controllo ottimo non è stabilizzante se $c_1 = c_2$ oppure se $c_1 = 3c_2$

3.ii) Nessuna delle soluzioni s.d.p. dell'equazione algebrica di Riccati è stabilizzante se la matrice

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango minore di 2 per qualche z a modulo unitario; nel caso specifico, per $z = \lambda_1 = -1$. È chiaro che

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

non ha rango 2 se e solo se $c_1 = c_2$. Quindi per questa scelta di C nessuna soluzione dell'equazione di Riccati è stabilizzante.

3.iii.) Una C cui corrisponde un controllo ottimo stabilizzante è, ad esempio, $C = [\, 0 \quad 1 \,]$, cui corrisponde $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Facciamo quindi questa scelta. Per rispondere al quesito, si prende ora *una matrice arbitraria K che stabilizzi il sistema: ad esempio si prende $K = [\,3 \quad 4\,]$, che è un controllore dead-beat. Si è dimostrato (cfr. Dispense) che, in corrispondenza alla matrice stabile $F + \mathbf{g}K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, la matrice limite M_∞ , che risolve il problema di controllo ottimo, è confinata superiormente dalla soluzione semidefinita positiva $P = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$ dell'equazione di Lyapunov :*

$$
\begin{aligned}
(F+\mathbf{g}K)^T X (F+\mathbf{g}K) - X &= -(K^T R K + Q) \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} p & r \\ r & q-p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 17 \end{bmatrix} \\
P = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 26 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.iv) Le matrici F e $F = \mathbf{g}K_\infty$ sono legate dalla relazione

$$F + \mathbf{g}K_\infty = [I + \mathbf{g}R^{-1}\mathbf{g}^T M_\infty]^{-1} F.$$

Quindi, se la matrice F è non singolare, come nel caso in esame, tale rimane anche la matrice $F + \mathbf{g}K_\infty$. Pertanto nessuno stato iniziale diverso da $\mathbf{0}$ viene portato a zero dal controllo ottimo in un tempo finito.

Esercizio 2.8. Si considerino il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.41}$$

e l'indice quadratico

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(u^2(t) + \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) \right), \quad Q = \bar{C}^T \bar{C}, \quad \bar{C} = [\,0 \quad \alpha \quad 1\,], \ \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.42}$$

Evidenziando, eventualmente, i valori di α per cui la risposta è positiva, si stabilisca se

3.i) esiste, per ogni scelta dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$, il controllo ottimo che minimizza l'indice quadratico;

3.ii) esistono stati iniziali non nulli in corrispondenza ai quali è nullo il valore minimo dell'indice e, in caso affermativo, si determinino tutti gli stati iniziali per cui risulta $\min_u J(u, \mathbf{x}_0) = 0$;

3.iii) la matrice di retroazione K_∞ che induce il controllo ottimo $u_{\text{ot}} = K_\infty \mathbf{x}$ stabilizza il sistema (si giustifichi la risposta).

3.iv) Per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determinino la soluzione "ottimizzante" M_∞ dell'equazione algebrica di Riccati e la matrice di retroazione K_∞.

Soluzione

3.i) Il sistema $(F, \mathbf{g})$ è raggiungibile, quindi il controllo ottimo che minimizza l'indice esiste per ogni $\mathbf{x}_0$

3.ii.) Si consideri la coppia (F, C). La matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0$ il nucleo di $\mathcal{O}$ è generato da $\mathbf{e}_1$, con $\mathbf{e}_1$ primo vettore della base canonica. Se $\alpha = 0$ il nucleo di $\mathcal{O}$ è generato da $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Nel primo caso il valore ottimo dell'indice è nullo se lo stato iniziale è $\beta\mathbf{e}_1$, nel secondo caso se lo stato iniziale è $\beta\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2$, con β e γ numeri reali arbitrari.

3.iii) Glo autovalori non osservabili della coppia (F, C) sono nulli (F è nilpotente) e quindi il controllo ottimo è stabilizzante, qualunque sia α.

3.iv.) L'equazione alle differenze di Riccati associata al problema di ottimo è

$$M(-t-1) = Q + F^T M(-t)F - F^T M(-t)\mathbf{g}(r + \mathbf{g}^T M(-t)\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}^T M(-t)F, \quad M(0) = 0$$

Si ha

$$M(-1) = Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

ed è immediato constatare che, se $M(-t)$ ha nulle la prima riga e la prima colonna, lo stesso si verifica per $M(-t-1)$. Quindi M_∞, soluzione dell'equazione algebrica di Riccati, ha nulle la prima riga e la prima colonna e ha struttura

$$M_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & z \end{bmatrix}$$

L'equazione algebrica è allora

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&- \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{1 + x + 2y + z} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x+y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & x+y \end{bmatrix}}{1 + x + 2y + z}
\end{aligned}$$

Si ottengono le equazioni scalari

$$\begin{aligned}
x &= \alpha^2 \\
y &= \alpha
\end{aligned}$$

$$z \;=\; 1+x-\frac{(x+y)^2}{1+x+2y+z}=(1+\alpha^2)-\frac{\alpha^2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2+z}$$

e quindi

$$\begin{aligned}0 &= z^2+z((1+\alpha)^2-z(1+\alpha^2)-(1+\alpha^2)(1+\alpha)^2+\alpha^2(1+\alpha)^2\\ &= z^2+2\alpha z-(1+\alpha)^2\end{aligned}$$

che ha per soluzioni $z=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+(1+\alpha)^2}$.

Se $\alpha>0$, *si deve scegliere* $z=-\alpha+\sqrt{\alpha^2+(1+\alpha)^2}$. *Se* $\alpha<0$, *si deve operare la stessa scelta, per garantire che* $xz-y^2$ *sia non negativo.*

Si avrà quindi

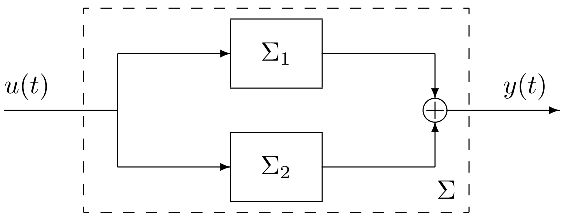
$$\begin{aligned}K_\infty &= -(r+\mathbf{g}^TM_\infty\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}^TM_\infty F=-(1+x+2y+z)^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&x&y\\0&y&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\\ &= -(1+x+2y+z)^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & x+y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{\alpha^2+\alpha}{((1+\alpha)^2+\sqrt{\alpha^2+(1+\alpha)^2})}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Esercizio 2.9. Dati i sistemi a tempo discreto

$$\Sigma_1 \;:\; \begin{cases}\mathbf{x}_1(t+1) = \begin{bmatrix}0&1\\0&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_1(t) = F_1\mathbf{x}_1(t)+\mathbf{g}_1u_1(t)\\ y_1(t) = \begin{bmatrix}\alpha & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_1(t) = H_1\mathbf{x}_1(t)\end{cases}$$

$$\Sigma_2 \;:\; \begin{cases}\mathbf{x}_2(t+1) = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}_2(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u_2(t) = F_2\mathbf{x}_2(t)+\mathbf{g}_2u_2(t)\\ y_2(t) = \begin{bmatrix}\beta & 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_2(t) = H_2\mathbf{x}_2(t)\end{cases}$$

con α e β parametri reali, si considerino la connessione in parallelo di figura



e, con riferimento al sistema inteconnesso Σ, l'indice quadratico

$$J(u,\mathbf{x}_0)=\sum_{t=0}^{\infty}(u^2(t)+y^2(t)).$$

3_i Si provi che, per ogni scelta dello stato iniziale $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(0)\\\mathbf{x}_2(0)\end{bmatrix}$, esiste un ingresso $u(\cdot)$ al quale corrisponde un valore finito dell'indice.

3_{ii} Per quali valori dei parametri α e β esistono stati iniziali non nulli del sistema parallelo in corrispondenza ai quali il valore minimo dell'indice è nullo? Quali sono questi stati?

3_{iii} Per quali valori dei parametri α e β esistono stati iniziali non nulli del sistema parallelo in corrispondenza ai quali il valore minimo dell'indice è nullo e il controllo ottimo K_∞ è stabilizzante?

3_{iv} Per quali valori dei parametri α e β esistono stati iniziali non nulli del sistema parallelo in corrispondenza ai quali il valore minimo dell'indice è nullo e il controllo ottimo K_∞ non è stabilizzante?

(3_i) *Il sistema parallelo* $\Sigma = (F, \mathbf{g}, H) = (\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, [\,H_1 \quad H_2\,])$*, non è né raggiungibile né osservabile, dal momento che* 0 *è autovalore comune di* F_1 *e* F_2*. La matrice* F *ha spettro* $\{0, -2\}$ *e, applicando il criterio PBH di raggiungibilità , si verifica che l'autovalore* -2 *appartiene al sottosistema raggiungibile. Quindi il sistema* Σ *è stabilizzabile (l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile è* 0*) e per ogni stato iniziale esistono ingressi che inducono un indice di valore finito.*

(3_{ii}) *L'indice può essere riscritto nella forma*

$$J(u, \mathbf{x}_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(u^2(t) + [\,\mathbf{x}_1^T(t) \quad \mathbf{x}_2^T(t)\,] \begin{bmatrix} H_1^T \\ H_2^T \end{bmatrix} [\,H_1 \quad H_2\,] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \right),$$

e gli stati cui corrisponde controllo ottimo a costo nullo sono tutti e solo quelli non osservabili del sistema $(F, H) = \left(\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, [\,\alpha \quad 1 \quad \beta \quad 1 \quad 1\,] \right)$*. Poiché gli spetti di* F_1 *e* F_2 *hanno intersezione non vuota, indipendentemente dai parametri* α *e* β *il sistema è non osservabile. Quindi esistono stati osservabili non nulli per ogni scelta di* α *e* β*. Il loro insieme è il nucleo della matrice di osservabilità:*

$$\mathcal{O} = \left[\begin{array}{c|cccc} \alpha & 1 & \beta & 1 & 1 \\ \hline 0 & \alpha - 2 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & -2\alpha + 4 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 4\alpha - 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\alpha + 16 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

• *Se* $\alpha = 0$*, la matrice*

$$\mathcal{O} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & \beta & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ha rango 4 o rango 3 a seconda che sia $\beta \neq 0$ *[caso a] o* $\beta = 0$ *[caso b].*

• *Se* $\alpha = 2$*, la matrice*

$$\mathcal{O} = \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & \beta & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ha rango 3 o rango 2 a seconda che sia $\beta \neq 0$ *[caso c] o* $\beta = 0$ *[caso d]*

• *Se* $\alpha \notin \{0, 2\}$, *la matrice* $\mathcal{O}$ *ha rango 4 o rango 3 a seconda che sia* $\beta \neq 0$ *[caso e] o* $\beta = 0$ *[caso f].*

(a) $\alpha = 0$ *e* $\beta \neq 0$ $\quad \ker \mathcal{O} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_1 \in \mathbb{R}\}$, *autovalore 0 non osservabile*

(b) $\alpha = 0$ *e* $\beta = 0$ $\quad \ker \mathcal{O} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ *autovalore 0 non osservabile*

(c) se $\alpha = 2$ *e* $\beta \neq 0$ $\quad \ker \mathcal{O} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (-2x_1 - x_2)/\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ *autovalori 0 e -2 non osservabili*

(d) se $\alpha = 2$ *e* $\beta = 0$, $\quad \ker \mathcal{O} = \{ \begin{bmatrix} (-x_2 - x_4)/2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ *autovalori 0 e -2 non osservabili*

(e) se $\alpha \notin \{0, 2\}$ *e* $\beta \neq 0$ $\quad \ker \mathcal{O} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -\alpha x_1/\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_1 \in \mathbb{R}\}$ *autovalore 0 non osservabile*

(f) se $\alpha \notin \{0, 2\}$ *e* $\beta = 0$ $\quad \ker \mathcal{O} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -\alpha x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ *autovalore 0 non osservabile.*

(3_{iii}) *Nei casi (a) (b) (e) (f) il sottosistema non osservabile ha come unico autovalore* $\lambda = 0$, *quindi la coppia* (F, H) *è rivelabile e il controllo ottimo è stabilizzante*

(3_{iv}) *Nei casi (c) e (d) il sottosistema non osservabile ha un autovalore,* $\lambda = -2$, *a modulo maggiore di 1,quindi la coppia* (F, H) *non è rivelabile e il controllo ottimo non è stabilizzante.*

3. SISTEMI POSITIVI

Esercizio 3.1. Si considerino le catene di Markov $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ caratterizzate dalle matrici di transizione

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

i) Per entrambe le catene si costruisca il grafo che ne rappresente l'evoluzione in un passo.

ii) Per la catena regolare, nell'ipotesi che lo stato iniziale sia S_1, si determini la distribuzione asintotica di probabilità sugli stati della catena

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{e}_1^T P_2^t$$

iii) Per la catena con stati transitori, si determini il numero medio di "visite" allo stato S_3, nell'ipotesi che

- lo stato iniziale sia S_3
- lo stato iniziale sia S_4

Esercizio 3.2 Si consideri il sistema lineare positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = F\mathbf{x}(t) \tag{1.44}$$

i) qual è l'autovalore dominante della matrice F?

ii) se lo stato iniziale è $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, qual è il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \ ?$$

Esercizio 3.3 . Si consideri il sistema lineare positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.45}$$

i) Si determinino gli autovalori del sistema.

ii) Se $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u(t) = 0 \ \forall t$, si determini il vettore

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$$

iii) Il cono di raggiungibilità C^R del sistema (1.45) è solido?

iv) Applicando al sistema (1.45) arbitrari ingressi non negativi, è possibile raggiungere dallo stato $\mathbf{0}$ ogni stato di $\mathbb{R}^3_+$?

Esercizio 3.4 - Si consideri il sistema lineare positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.46}$$

i Si determini un insieme di generatori per il cono di raggiungibilità C_k^R. Esiste un istante k in cui risulta $C_k^R = C_{k+1}^R$? (si giustifichi la risposta)

ii Esiste un cambiamento di base nello spazio di stato che, preservando la positività del sistema, lo porti in forma canonica di controllo o, più in generale, in una forma in cui F_c è matrice compagna?

iii Esiste una matrice di retroazione $K \geq 0$ che renda minore di 2 il raggio spettrale della matrice $F+\mathbf{g}K$? (si giustifichi la risposta negativa o, se la risposta è positiva, si fornisca un esempio per K)

(i) C_k^R è generato dai vettori positivi $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \dots, F^{k-1}\mathbf{g}$, quindi (riscalando i vettori) da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k-2 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

Evidentemente (basta una figura) nessuno dei vettori dell'elenco appartiene al cono generato dai vettori che lo precedono. Quindi per ogni k il cono C_k^R è contenuto propriamente in C_{k+1}^R.

(ii) Se F fosse simile ad una matrice compagna positiva, il polinomio caratteristico di F avrebbe negativi o nulli tutti i coefficienti, eccetto quello (unitario) del monomio di grado massimo. Ma il polinomio caratteristico di F è $(z-2)[(z-1)^2-1] = z^3 - 4z^2 + 4z$ e quindi non soddisfa la condizione richiesta.

Senza calcolare il polinomio caratteristico di F, si perviene alla medesima conclusione osservando che la coppia $(F, \mathbf{g})$ è raggiungibile e se il polinomio caratteristico fosse del tipo anzidetto dovremmo avere $C_n^R = C_{n+1}^R$, in contrasto con quanto si è trovato al punto (i).

(iii) Qualunque sia $K \geq 0$, vale la diseguaglianza $F+\mathbf{g}K \geq F$, quindi l'autovalore di Perron di $F+\mathbf{g}K$ è maggiore o eguale all'autovalore di Perron di F. Ma quest'ultimo vale 2. La risposta è quindi negativa.

Esercizio 3.5. Si consideri la catena di Markov $\mathcal{C}$ caratterizzata dalla matrice di transizione

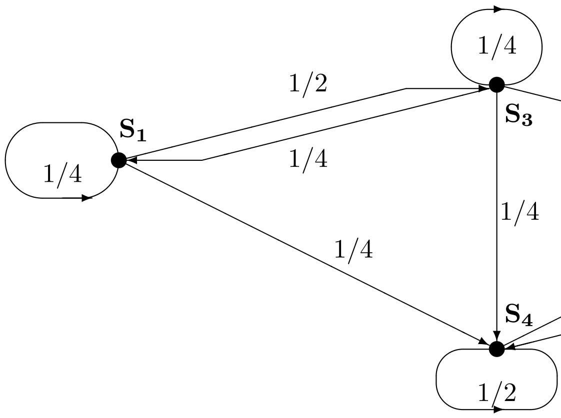
$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

i Costruito il grafo che ne rappresenta l'evoluzione in un passo, si individuino classi ergodiche e classi transitorie (e si rinumerino, eventualmente, gli stati in modo che gli stati delle classi ergodiche precedano quelli delle classi transitorie).

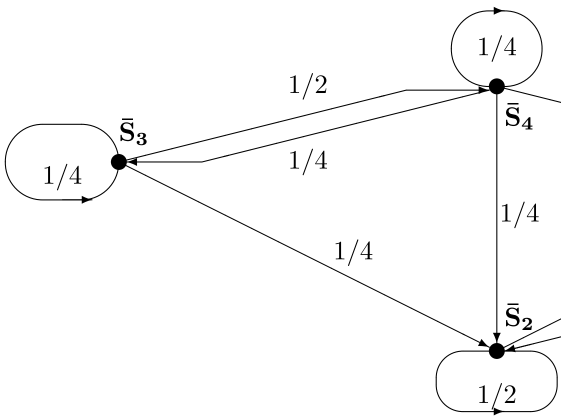
ii Si determini la distribuzione asintotica di probabilità sugli stati della catena.

iii Per ogni stato S_i stati delle classi transitorie, nell'ipotesi che lo stato iniziale della catena sia S_i si determini quante volte in media la catena si trova in S_i (contando l'istante iniziale) prima di entrare in una classe ergodica.

1*) Il tracciamento del grafo è immediato*



S_4 e S_2 comunicano e da essi non si accede ad altri stati: quindi formano una classe ergodica, S_1 e S_3 comunicano e da essi si accede alla classe ergodica Rinumerando gli stati come richiesto, grafo e matrice di transizione diventano



$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

ii) Con riferimento alla (1.49), è nulla la probabilità asintotica che la catena si trovi in uno degli stati transitori, quindi è unitaria la probabilità che asintoticamente la catena si trovi nella classe *ergodica. La dinamica nella classe ergodica è descritta dalla matrice stocastica strettamente positiva*

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

che ha $[\,\frac{3}{7} \quad \frac{4}{7}\,]$ *come autovettore sinistro corrispondente all'autovalore 1.*
La distribuzione asintotica di probabilità sugli stati $\bar{\mathbf{S}}_1, \bar{\mathbf{S}}_2, \bar{\mathbf{S}}_3, \bar{\mathbf{S}}_4$ *è quindi*

$$\bar{\mathbf{p}}_0^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

iii) La matrice fondamentale delle classi transitorie è

$$L = (I_2 - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{16}{7} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 & 8/7 \\ 4/7 & 12/7 \end{bmatrix}$$

Gli elementi diagonali della matrice L forniscono i valori cercati: se lo stato iniziale è $\bar{\mathbf{S}}_3$*, il numero medio di volte che la catena è in* $\bar{\mathbf{S}}_3$ *prima di entrare nella classe ergodica è* $12/7$*; lo stesso valore si ottiene per il numero medio di passaggi per* $\bar{\mathbf{S}}_4$ *partendo da* $\bar{\mathbf{S}}_4$*.*

Esercizio 3.6. Si consideri il sistema discreto positivo di equazioni

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + [\,\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2\,]\,\mathbf{u}(t) \tag{1.51}$$

(i) Si stabilisca per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$ il sistema (a due ingressi) (F, G), il sistema (a ingresso scalare) $(F, \mathbf{g}_1)$ e il sistema (a ingresso scalare) $(F, \mathbf{g}_2)$ sono positivamente completamente raggiungibili.

(ii) Per ciascuno dei tre sistemi, si determinino i coni di raggiungibilità in 5 passi in corrispondenza ai valori di α per i quali non c'è completa raggiungibilità positiva.

(iii) La matrice F è irriducibile? In caso negativo, si operi una trasformazione di cogredienza (i.e. una permutazione delle coordinate) che riduca la matrice in forma triangolare a blocchi.

(iv) Per quali valori di $\beta > 0$ la matrice βF è asintoticamente stabile?

(i) La matrice di raggiungibilità della coppia (F, G)

$$\mathcal{R} = [\,G \quad FG \quad F^2G \quad F^3G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

include per ogni $\alpha \geq 0$ *una sottomatrice monomia. Quindi il sistema è positivamente completamente raggiungibile per ogni* $\alpha \geq 0$*.*
Per la coppia $(F, \mathbf{g}_1)$ *si perviene alla matrice di raggiungibilità*

$$\mathcal{R} = [\,\mathbf{g}_1 \quad F\mathbf{g}_1 \quad F^2\mathbf{g}_1 \quad F^3\mathbf{g}_1\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1+\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

che non è monomia, per qualsiasi $\alpha \geq 0$.
Per la coppia $(F, \mathbf{g}_2)$ si perviene alla matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = [\, \mathbf{g}_2 \quad F\mathbf{g}_2 \quad F^2\mathbf{g}_2 \quad F^3\mathbf{g}_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che non è monomia, per qualsiasi $\alpha \geq 0$.
Quindi i sistemi $(F, \mathbf{g}_1)$ e $(F, \mathbf{g}_2)$ non sono positivamente completamente raggiungibili, qualunque sia $\alpha \geq 0$.

(ii) Per il sistema $(F, \mathbf{g}_2)$ è immediato che il cono di raggiungibilità in 2,3, ... passi è dato dalle combinazioni non negative dei vettori $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$.
Per il sistema $(F, \mathbf{g}_1)$ il cono di raggiungibilità in 5 passi è dato dalle combinazioni non negative di

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\alpha \\ \alpha+1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3\alpha \\ 3+\alpha \\ 3 \end{bmatrix}$$

(iii) La matrice F non è irriducibile: basta notare che $I + F + F^2 + F^3$ non è strettamente positiva, o verificare che il grafo orientato associato alla matrice non è fortemente connesso. Una trasformazione di cogredienza che soddisfa quanto richiesto si ottiene, p.es., scambiando la seconda colonna con la quarta e la seconda riga con la quarta:

$$P^T F P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(iv) Gli autovalori di F sono gli zeri di $(z^2 - 1)(z^2 - z - 1)$. L'autovalore di modulo massimo è

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 1.$$

Perchè βF sia asintoticamente stabile, si deve scegliere $0 \leq \beta < \lambda_0^{-1}$.

Esercizio 3.7. Si consideri il sistema discreto positivo di equazioni

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \tag{1.52}$$

(i) Si determini il cono di raggiungibilità in 4 passi;

(ii) Si stabilisca per quali valori positivi del parametro $\alpha \geq 0$ il cono di raggiungibilità in 3 passi e quello in quattro passi coincidono?

(iii) Per quali valori di $\alpha \geq 0$ la matrice F è irriducibile?

(iv) Per quali valori di $\alpha \geq 0$ il sistema è asintoticamente stabile?

Soluzione

(i) Il cono di raggiungibiltà in tre passi, e quindi quello in quattro passi, è un cono solido. Si ha

$$C_4^R = \text{Cono}(\mathbf{g}, F\mathbf{g}, F^2\mathbf{g}, F^3\mathbf{g}) = \text{Cono}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1+\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 1+2\alpha \\ (1+\alpha)^2 \end{bmatrix} \right),$$

ovvero sono raggiungibili in 4 passi con ingressi non negativi tutte le combinazioni non negative dei vettori sopra specificati.

(ii) i coni di raggiungibilità in $n = 3$ passi e in $n+1 = 4$ passi coincidono se e solo se il polinomio caratteristico di F

$$\Delta_F(z) = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

ha tutti i coefficienti $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ non positivi. Nel nostro caso si ha

$$\Delta_F(z) = \det \begin{bmatrix} z & -\alpha & 0 \\ -1 & z & -1 \\ -\alpha & -1 & z-1 \end{bmatrix} = z^3 - z^2 - (1+\alpha)z - \alpha(\alpha-1),$$

quindi i coni coincidono se $\alpha = 0$ oppure se $\alpha \geq 1$.

(iii) La matrice F è irriducibile sse $\alpha > 0$, e anzi in questo caso essa risulta primitiva, essendo $F^3 >> 0$. Per $\alpha = 0$ gli elementi in posizione (1,2) e (1,3) rimangono nulli in tutte le potenze di F, quindi la matrice non è irriducibile.

(iv) Per ogni $\alpha \geq 0$ tutte le somme degli elementi di colonna sono maggiori o eguali a 1. Quindi l'autovalore dominante non può essere minore di 1. La matrice non è asintoticamente stabile per alcun valore non negativo di α.
Si può verificare che non è nemmeno semplicemente stabile: per $\alpha > 1$ le somme di colonna sono tutte maggiori di 1, per $\alpha = 0$ la matrice F è triangolare a blocchi, con un blocco diagonale $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha autovalore massimale maggiore di 1.

Esercizio 3.8. Per la catena di Markov con 8 stati $S_1, S_2, \dots, S_8$

$$\mathbf{x}^T(t+1) = \mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & p_{17} & p_{18} \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T(t)P \qquad (1.53)$$

si considerino i seguenti casi:

Caso A) $p_{17} = p_{18} = \frac{1}{2}$,
Caso B) $p_{16} = p_{18} = \frac{1}{2}$
Caso C) $p_{15} = p_{16} = p_{17} = \frac{1}{3}$

i) Si stabilisca in quali casi la catena è irriducibile e in quali è regolare.

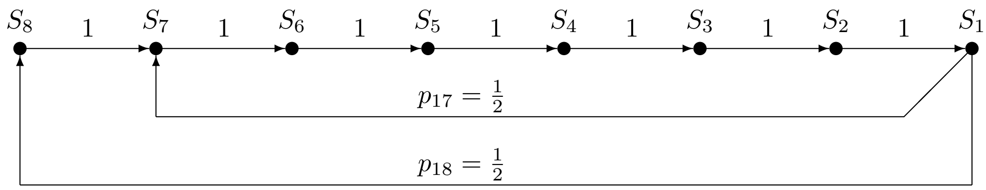
ii) Nel caso in cui la catena è regolare

– si determini la distribuzione asintotica di probabilità sugli 8 stati che compongono la catena;

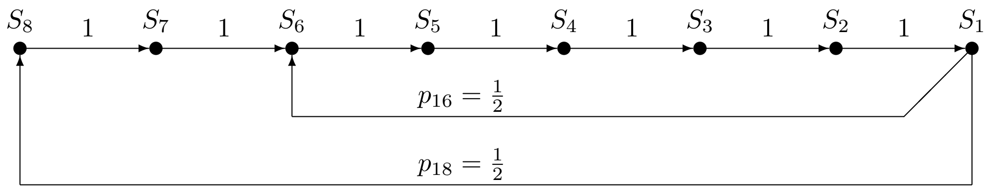
– se all'istante $t = 0$ la catena si trova nello stato S_8, qual è il tempo medio richiesto perché la catena visiti ancora lo stato S_8?

iii) Quando la catena è irriducibile, si determini il valore dell'indice di imprimitività della matrice di transizione, quando è riducibile, si determinino le classi ergodiche e le eventuali classi transitorie.

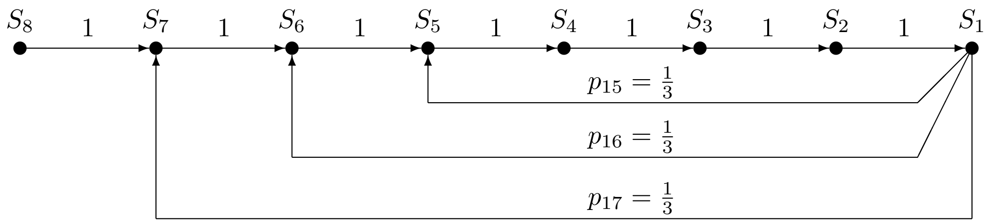
Soluzione Di seguito si riportano i grafi delle catene:



Caso A



Caso B



Caso C

4.i) *Nel caso C la catena non è irriducibile (la matrice ha una colonna nulla). Negli altri due casi la catena è irriducibile (basta osservare che il suo grafo è fortemente connesso). Il polinomio caratteristico è dato da*

$$-p_{1n} - zp_{1,n-1} - z^2 p_{1,n-2} - \ldots - z^{n-1}p_{1,1} + z^n$$

Quindi esso vale

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + z^8 = -\frac{1}{2}z^{n_0} - \frac{1}{2}z^{n_1} + z^{n_2} \qquad \text{Caso A} \tag{1.54}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2 + z^8 = -\frac{1}{2}z^{\tilde{n}_0} - \frac{1}{2}z^{\tilde{n}_1} + z^{\tilde{n}_2} \qquad \text{Caso B} \tag{1.55}$$

Nel caso A la catena è regolare. Infatti la matrice di transizione è primitiva, ovvero irriducibile con indice di imprimitività 1. Lo si vede ricorrendo al criterio basato sulle potenze a coefficiente *non nullo nel polinomio caratteristico:*

$$\mathrm{MCD}(n_1 - n_0, n_2 - n_1) = \mathrm{MCD}(1,7) = 1$$

Nel caso B la matrice è irriducibile con indice di imprimitività 2: infatti

$$\mathrm{MCD}(\tilde{n}_1 - \tilde{n}_0, \tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) = \mathrm{MCD}(2,6) = 2$$

4.ii) *Nel caso A determiniamo l'autovettore dominante sinistro corrispondente all'autovalore 1, risolvendo l'equazione* $\mathbf{p}_0^T P = \mathbf{p}_0^T$.
Posto $\mathbf{p}_0^T = [\,\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4 \quad \xi_5 \quad \xi_6 \quad \xi_7 \quad \xi_8\,]$ *e scelto* $\xi_1 = 1$, *si ricava* $1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6$, *quindi* $\xi_8 = \frac{1}{2}$ *e infine* $\xi_7 = 1$.
Rinormalizzando $\mathbf{p}_0^T$ *a un vettore stocastico si trova*

$$\mathbf{p}_0^T = [\,\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6 \quad \gamma_7 \quad \gamma_8\,] = [\,\tfrac{2}{15} \quad \tfrac{2}{15} \quad \tfrac{2}{15} \quad \tfrac{2}{15} \quad \tfrac{2}{15} \quad \tfrac{2}{15} \quad \tfrac{2}{15} \quad \tfrac{1}{15}\,]$$

che rappresenta la distribuzione asintotica di probabilità della catena nel caso A.
Il tempo medio richiesto per rivisitare lo stato S_8 *partendo da* S_8 *è dato da* $\frac{1}{\gamma_8} = 15$ *passi.*

4.iii) *Per il caso B si è già risposto al punto 4.i). Per il caso C (catena non irriducibile), le classi di comunicazione sono due (come è evidente anche dal grafo):*

$$\{S_8\} \text{ classe transitoria}$$

$$\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\} \text{ classe ergodica.}$$

Esercizio 3.9. Si considerino le catene di Markov $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ caratterizzate dalle matrici di transizione

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.56}$$

4.i) Per entrambe le catene si costruisca il grafo che ne rappresenta l'evoluzione in un passo.

4.ii) Per la catena regolare, nell'ipotesi che lo stato iniziale sia S_1, si determini la distribuzione asintotica di probabilità sugli stati della catena

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{e}_1^T P_2^t$$

e il tempo medio richiesto perchè la catena ritorni nello stato S_1

4.iii) Per la catena non regolare, si dimostri che è irriducibile, si determini l'indice di irriducibilità e si calcolino gli autovalori periferici.

4.iv) Ne caso della catena non regolare, se la distribuzione iniziale di probabilità è $\mathbf{x}^T(0)$, si verifichi che al divergere di t la distribuzione $\mathbf{x}^T(t)$ tende ad avere carattere periodico.

SOLUZIONE 4.i)

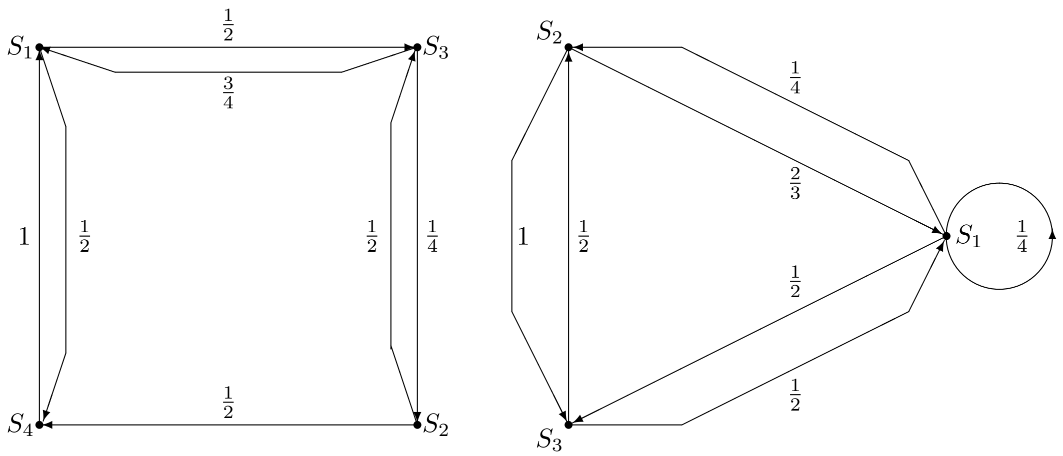


Figura 4.1

4.ii) E' immediato che $P_2^2 \gg 0$. *Quindi la catena* $\mathcal{C}_2$ *è regolare. Asintoticamente la distribuzione è quella dell'autovettore di Perron sinistro, indipendentemente dalla distribuzione iniziale.*

Per ottenere la distribuzione asintotica si risolve l'equazione

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{10}{23} & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} \end{bmatrix} \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

Il tempo medio richiesto per rivisitare lo stato S_1 *è dato da* $\frac{1}{\gamma_1} = \frac{23}{10}$

4.iii) La matrice $I_4 + P_1 + P_1^2 + P_2^3$ *è strettamente positiva, quindi la catena è irriducibile. Non è regolare, dal momento che i i blocchi diagonali di* P_1^{2t} *sono nulli per ogni* $t > 0$. *L'indice di irriducibilità vale 2 (per t grandi in ogni posizione della matrice si alternano il valore 0 e un valore positivo) Gli autovalori periferici sono* $\lambda_0 = 1$ *e* $\lambda_1 = -1$, *cui corrisponde, rispettivamente, un autovettore stocastico sinistro* $\mathbf{p}_0^T$ *e un autovettore sinistro* $\mathbf{w}_1^T$. *Gli altri due autovalori* λ_2 *e* λ_3 *hanno modulo minore di 1, con autovettori sinistri* $\mathbf{w}_2^T$ *e* $\mathbf{w}_3^T$.

4.iv) Rispetto alla base di Jordan si ha

$$\mathbf{x}^T(0) = \mathbf{p}_0^T + \alpha_1 \mathbf{w}_1^T + \alpha_2 \mathbf{w}_2^T + \alpha_3 \mathbf{w}_3^T \qquad (1.58)$$

Al divergere di t la distribuzione di probabilità sui 4 stati

$$\mathbf{x}^T(t) = \mathbf{p}_0^T + \alpha_1(-1)^t \mathbf{w}_1^T + \alpha_2 P_1^t \mathbf{w}_2^T + \alpha_3 P_1^t \mathbf{w}_3^T \;\sim\; \mathbf{p}_0^T + \alpha_1(-1)^t \mathbf{w}_1^T$$

diventa periodica, di periodo 2:
- *negli istanti pari si ha* $\mathbf{x}^T(2t) = \mathbf{p}_0^T + \alpha_1 \mathbf{w}_1^T$,
- *negli istanti dispari si ha* $\mathbf{x}^T(2t+1) = \mathbf{p}_0^T - \alpha_1 \mathbf{w}_1^T$.

Si noti che il vettore $\mathbf{w}_1^T$ *ha nulla la somma delle componenti, come si evince postmoltiplicando per l'autovettore di Perron destro* $\mathbf{1}_4$ *entrambi i membri di (1.58).*

Esercizio 3.10 - Si consideri il sistema lineare positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \tag{1.59}$$

4.i) Si determini un insieme di generatori per il cono di raggiungibilità C_k^R. Esiste un istante k in cui risulta $C_k^R = C_{k+1}^R$? (si giustifichi la risposta)

4.ii) Esiste un cambiamento di base nello spazio di stato che, preservando la positività del sistema, lo porti in forma canonica di controllo o, più in generale, in una forma in cui F_c è matrice compagna?

4.iii) Esiste una matrice di retroazione $K > 0$ che renda minore di 2 il raggio spettrale della matrice $F + \mathbf{g}K$? e che lo renda eguale a 2? (si giustifichino le risposte)

Soluzione

4. i) C_k^R *è generato dai vettori positivi* $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \dots, F^{k-1}\mathbf{g}$, *quindi (riscalando i vettori) da*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

Nessuno dei vettori dell'elenco appartiene al cono generato dai vettori che lo precedono. Una figura rende evidente l'asserto.
Per una dimostrazione analitica, basta osservare che se l'ultimo vettore fosse combinazione a coefficienti non negativi dei vettori precedenti, avremmo

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_{k-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k-1 \end{bmatrix} = F^{k-1}\mathbf{g}, \quad \text{con } \alpha_i \geq 0 \tag{1.61}$$

Ma allora deve essere :
$\alpha_1 = 0$, *affinché le prime due componenti di* $F^{k-1}\mathbf{g}$ *siano eguali,*
$\sum_{i=2}^{k-2} \alpha_i = 1$ *(combinazione convessa) affinchè prime due componenti di* $F^{k-1}\mathbf{g}$ *valgano 1.*
Per quanto riguarda l'ultima componente di $F^{k-1}\mathbf{g}$, *abbiamo infine*

$$\sum_{i=2}^{k-2} \alpha_i i \leq \sum_{i=2}^{k-2} \alpha_i (k-2) = k-2 < k-1$$

e si conclude che nessuna scelta delle α_i *consente di soddisfare la (1.61).*
Quindi per ogni k *il cono* C_k^R *è contenuto propriamente in* C_{k+1}^R.

4.ii) Se F *fosse simile ad una matrice compagna positiva, il polinomio caratteristico di* F *avrebbe negativi o nulli tutti i coefficienti, eccetto quello (unitario) del monomio di grado massimo. Ma il polinomio caratteristico di* F *è* $(z-2)[(z-1)^2 - 1] = z^3 - 4z^2 + 4z$ *e quindi non soddisfa la condizione richiesta.*
Senza calcolare il polinomio caratteristico di F, *si perviene alla medesima conclusione osservando che la coppia* $(F, \mathbf{g})$ *è raggiungibile e che se il polinomio caratteristico fosse del tipo anzidetto dovremmo avere* $C_n^R = C_{n+1}^R$, *in contrasto con quanto si è trovato al punto (i).*

4. iii) Qualunque sia $K > 0$, *vale la diseguaglianza* $F + \mathbf{g}K > F$, *quindi l'autovalore di Perron di* $F + \mathbf{g}K$ *è maggiore o eguale all'autovalore di Perron di* F. *Si noti poi che*

$$F + \mathbf{g}K = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ k_1 & 2+k_2 & 2+k_3 \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *è strettamente positiva e ha raggio spettrale 2. Ogni incremento di un suo elemento ne aumenta il raggio spettrale e pertanto ogni scelta* $K_1 = [\,k_1 \quad k_2 \quad 0\,] > 0$ *rende maggiore di 2 il raggio spettrale di* $F + \mathbf{g}K_1$.
Per ogni scelta $K_2 = [\,0 \quad 0 \quad k_3\,] > 0$, *risulta*

$$F + \mathbf{g}K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2+k_3 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2+k_3 \end{bmatrix},$$

quindi il raggio spettrale di $F + \mathbf{g}K_2$ *è almeno* $2 + k_3 > 2$.
Infine, nel caso $K = K_1 + K_2 = [\,k_1 \quad k_2 \quad 0\,] + [\,0 \quad 0 \quad k_3\,] > 0$ *con* K_1 *e* K_2 *entrambe positive, basta porre* $F + \mathbf{g}K = F + \mathbf{g}K_1 + \mathbf{g}K_2$ *per concludere che il raggio spettrale della matrice reazionata è ancora una volta maggiore di 2.*

Esercizio 3.11 Si consideri il sistema lineare positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t)$$

6_i Si stabilisca se l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'ingresso nullo.

6_{ii} Se $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\forall t \geq 0$, esiste in $\mathbb{R}^4_+$ un corrispondente stato di equilibrio per il sistema? Si tratta di un equilibrio stabile? Se ne determini il valore [eventuali inverse di matrici possono essere lasciate indicate].

6_{iii}) Si stabilisca qual è il cono di raggiungibilità del sistema.

Soluzione

(6_i) *Le somme di riga della matrice* F *sono tutte strettamente minori di 1, quindi l'autovalore di Perron è minore di 1 e il sistema autonomo ha l'origine che è punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

(6_{ii}) *Si deve risolvere in* $\mathbf{x}_e$ *l'equazione* $\mathbf{x}_e = F\mathbf{x}_e + G\bar{\mathbf{u}}$ *ovvero* $(I_4 - F)\mathbf{x}_e = G\bar{\mathbf{u}}$. *La matrice* $(I_4 - F)$ *è invertibile, non avendo autovalori nulli, e grazie al fatto che lo spettro della matrice* F *è interno alla circonferenza unitaria, l'inversa* $(I_4 - F)^{-1}$ *è esprimibile come somma della serie convergente di matrici positive* $I + F + F^2 + F^3 + \ldots$ *Quindi la somma della serie è positiva ed è positiva la soluzione*

$$\mathbf{x}_e = (I_4 - F)^{-1} G\bar{\mathbf{u}} = 2 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/4 \\ -1/3 & 1 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'equilibrio in $\mathbf{x}_e$ *per l'ingresso costante* $\bar{\mathbf{u}}$ *è asintoticamente stabile. Infatti, se lo stato iniziale è* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e + \Delta\mathbf{x}_e$, *e poniamo* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + \Delta\mathbf{x}(t)$, *da*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}_e + \Delta\mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}_e + F\Delta\mathbf{x}(t) + G\bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{x}_e &= F\mathbf{x}_e + G\bar{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro si ricava

$$\Delta \mathbf{x}(t+1) = F \Delta \mathbf{x}(t)$$

che, attesa l'infinitesimalità di F^t, *converge a zero qualunque sia* $\Delta \mathbf{x}(0)$.

(6_{iii}) *I generatori del cono di raggiungibilità sono le colonne di* $[\,G \quad FG \quad F^2G \quad \dots]$. *Poiché i vettori* $\mathbf{g}_1, F\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, F\mathbf{g}_2$ *nel loro complesso formano una matrice monomia*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

il cono di raggiungibilità coincide con $\mathbb{R}^4_+$.