

Analisi spettrale

Che cos'è lo spettro di un segnale? Perché e come si misura?

- Sia $x(t)$ un segnale nel dominio del tempo.
- La sua trasformata di Fourier vale:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad -\infty < f < +\infty$$

- Le misure nel dominio della frequenza permettono di sapere quanta energia è presente in un segnale ad una data frequenza.
- Lo strumento di misura dedicato all'analisi in frequenza dei segnali è l'**ANALIZZATORE DI SPETTRO**.

1

Applicazioni

- **Caratterizzazione di sorgenti di segnale.**
- **Analisi di sistemi lineari.**
- **Misure di compatibilità elettromagnetica:**
 - misura di disturbi irradiati e disturbi condotti.
- **Misure per telecomunicazioni:**
 - analisi di segnali modulati,
 - caratterizzazione di apparati di trasmissione,
 - ripartizione dello spettro (allocazione delle frequenze).

2

Specifiche di un analizzatore di spettro

■ Specifiche in frequenza:

- **ampio campo di frequenze misurabili** (4 o 5 decadi) entro le quali deve essere garantito un dato grado di incertezza. Ad esempio: da 0.1Hz a 10kHz, da 1kHz a 100MHz, ecc.
- **buona risoluzione in frequenza:** lo strumento deve essere in grado di distinguere le componenti di un segnale anche quando la loro separazione in frequenza è molto piccola.

3

Specifiche di un analizzatore di spettro (2)

■ Specifiche in ampiezza:

- **grande dinamica per le ampiezze:** per essere in grado di misurare contemporaneamente componenti di intensità molto diversa. Corrisponde al rapporto, espresso in dB, tra la minima e la massima ampiezza rilevabili contemporaneamente.
- **elevata sensibilità:** lo strumento deve poter analizzare accuratamente segnali di ampiezza ridotta;
- **uniformità:** il comportamento dello strumento non deve cambiare al variare della frequenza.

4

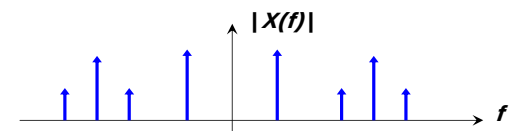
Specifiche di un analizzatore di spettro (3)

■ Specifiche di linearità:

- i circuiti interni ad un analizzatore di spettro devono essere particolarmente curati per evitare di introdurre distorsioni del segnale
- qualunque distorsione causa un'alterazione dello spettro da misurare, con la possibile comparsa di nuove componenti spettrali e la variazione di quelle effettivamente esistenti
- lo strumento non deve introdurre componenti spettrali spurie (dovute ai propri circuiti) nella misura
- nelle specifiche viene normalmente indicato lo spurious-free dynamic range dello strumento.

5

Segnali a spettro discreto (1)



- Un segnale a spettro discreto è composto da un certo numero di termini sinusoidali, non necessariamente in relazione armonica.
- Sia $x(t)$ una funzione reale.
- Allora $X(f)$ ha simmetria hermitiana: $X(-f)=X^*(f)$.

6

Segnali a spettro discreto (2)

$$x(t) = |X(0)| + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X(f_k)| \cos(2\pi f_k t + \arg[X(f_k)])$$

- L'informazione sullo spettro di $x(t)$ si può ricavare dalla conoscenza di $X(f)$ per $f > 0$.
- $f_1, \dots, f_k$ sono le frequenze delle componenti del segnale.
- $|X(0)|$ è riferito ad un'eventuale componente continua.
- $2|X(f_1)|, \dots, 2|X(f_k)|$ rappresentano le ampiezze delle singole componenti.

7

Segnali a spettro discreto (3)

Come viene visualizzato lo spettro $X(f)$?

- Lo schermo di un analizzatore di spettro ha scala orizzontale tarata in frequenza.
- La scala verticale può dare un'indicazione di:
 - ampiezza, espressa come valore efficace di un'onda sinusoidale (V_{RMS}). Nel caso in esame:

$$|X(0)|, \frac{2}{\sqrt{2}} |X(f_1)|, \dots, \frac{2}{\sqrt{2}} |X(f_k)|$$

- potenza (W): a tal fine è necessario specificare il valore di impedenza Z_L a cui si fa riferimento (impedenza di ingresso dello strumento).

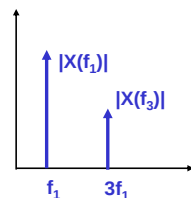
8

Segnali a spettro discreto (4)

Esempio: $x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_3 \sin(2\pi 3f_1 t + \phi_3)$

Ampiezze delle singole componenti:

$$\begin{aligned} X(-3f_1) &= j \frac{A_3}{2} e^{-j\phi_3} & X(3f_1) &= -j \frac{A_3}{2} e^{j\phi_3} \\ X(-f_1) &= j \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} & X(f_1) &= -j \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} \end{aligned}$$



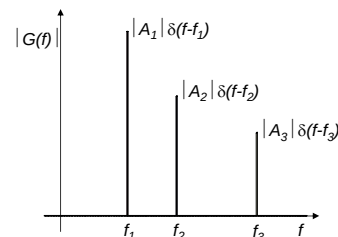
Spettro misurato in potenza:

$$P_1 = \frac{2 \cdot |X(f_1)|^2}{|Z_L|} = \frac{A_1^2}{2 \cdot |Z_L|} \quad P_3 = \frac{2 \cdot |X(3f_1)|^2}{|Z_L|} = \frac{A_3^2}{2 \cdot |Z_L|}$$

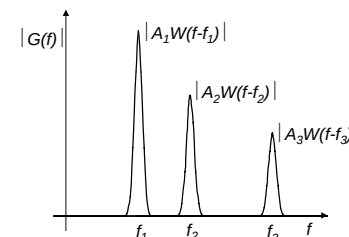
9

Segnali a spettro discreto (5)

CASO IDEALE



CASO REALE



10

Risoluzione in frequenza

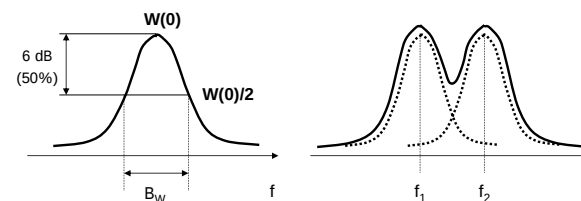
- E' definita come la minima separazione in frequenza Δf alla quale uno strumento è in grado di distinguere due componenti spettrali della stessa ampiezza.
- Qualsiasi analizzatore di spettro si può caratterizzare con una propria **funzione di risoluzione $W(f)$** .
- Dato un segnale con spettro $X(f)$, l'analizzatore di spettro visualizza il risultato della convoluzione nel dominio della frequenza tra $X(f)$ e $W(f)$:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \cdot W(f - \nu) d\nu$$

11

Risoluzione in frequenza (2)

- La risoluzione in frequenza di un analizzatore di spettro è pari alla **banda passante a 6 dB**, B_W , della sua funzione di risoluzione $W(f)$.
- Risolvere due componenti **non significa** essere in grado di misurarle correttamente.



12

Risoluzione in frequenza (3)

- Per misurare accuratamente lo spettro di ampiezza si deve invece imporre una separazione in frequenza maggiore, in modo da evitare interferenza tra componenti spettrali.
- A tale scopo si può considerare, ad esempio, la **banda a -20 dB** della funzione di risoluzione, che indica la distanza a cui l'interferenza causata da una componente del segnale è pari al **10%** della sua ampiezza.
- Nelle specifiche degli strumenti viene indicato un parametro, detto selettività, dato dal rapporto: B_{-20dB}/B_{-6dB} , che dipende esclusivamente da $W(f)$.

13

Risoluzione in frequenza (4)

- Lo spettro del segnale $X(f)$ rimane inalterato solo se $W(f)=\delta(f)$.
- Condizione necessaria è che $W(f)$ sia a banda sufficientemente stretta.
- Per un segnale a spettro discreto, lo strumento visualizza la funzione:

$$G(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cdot W(f - f_k)$$

- Se le componenti di $X(f)$ sono sufficientemente lontane, la loro ampiezza misurata dallo strumento è data da:

$$G(f_k) = A_k \cdot W(0)$$

14

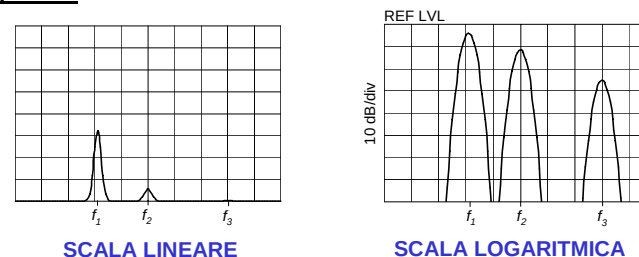
Presentazione in scala logaritmica

- Un analizzatore presenta una traccia proporzionale a $|X(f)|$ oppure a $|X(f)|^2$ (quantità sempre positive).
- **Scala lineare:**
 - valore 0 come estremo inferiore.
 - Fattore di scala in V/div oppure mV/div.
- **Scala logaritmica:**
 - $\log(0) = -\infty!!!$
 - Si definisce il **valore massimo**, denominato **reference level**.
 - Fattore di scala verticale in **dB/div**.

15

Presentazione in scala logaritmica (2)

- La presentazione in scala logaritmica permette di evidenziare componenti di ampiezza ridotta.
- In una scala logaritmica il livello di riferimento corrisponde al margine **superiore** dello schermo.



16

dB, dBV, dBm

- I decibel (dB) si riferiscono ad un rapporto tra due quantità.
- Per esprimere correttamente un'unità di misura in scala logaritmica è necessario definirla in rapporto ad una quantità di riferimento.

■ Per la **misura delle ampiezze** si usano i **dBV**:

$$20 \log_{10} \frac{V_x}{1 [V_{RMS}]}$$

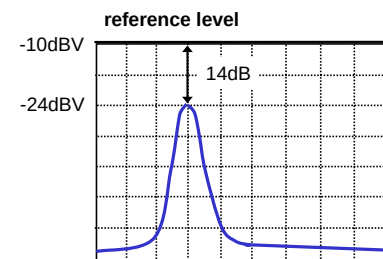
■ Per la **misura delle potenze** si usano i **dBm**:

$$10 \log_{10} \frac{P_x}{1 [mW]}$$

17

dB, dBV, dBm: esempio

- Livello di riferimento a -10dBV.
- La componente spettrale dà luogo ad un picco di 14dB inferiore.
- L'ampiezza della componente è pari quindi a -24dBV.
- Pari quindi a 63mV.



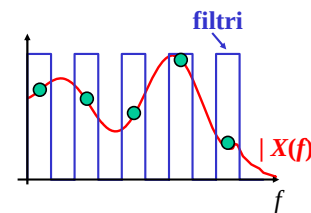
18

Architettura di un analizzatore (1)

- **Analizzatori "in tempo reale"**: tutte le componenti del segnale vengono misurate contemporaneamente:
 - strumenti **analogici** basati su banchi di filtri selettivi
 - strumenti **digitali** basati sul calcolo numerico della trasformata di Fourier
- **Analizzatori a scansione**: le componenti spettrali del segnale vengono misurate in istanti di tempo successivi:
 - strumenti **analogici** basati su tecniche di modulazione e trasposizione di frequenza
 - esteso campo di frequenze misurabili, dinamica di ampiezza 70-80 dB

19

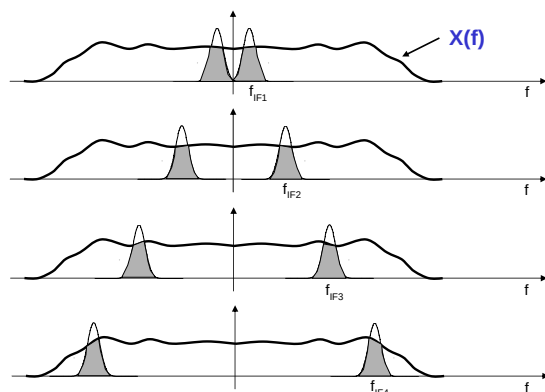
Banco di filtri selettivi



- ☺ tempo misura $\equiv$ ritardo filtro: analisi molto veloce
- ☺ una variazione di risoluzione richiede la variazione di banda dei filtri
- ☹ numero di filtri elevato
- ☹ architettura complessa

20

Filtro a sintonia variabile



21

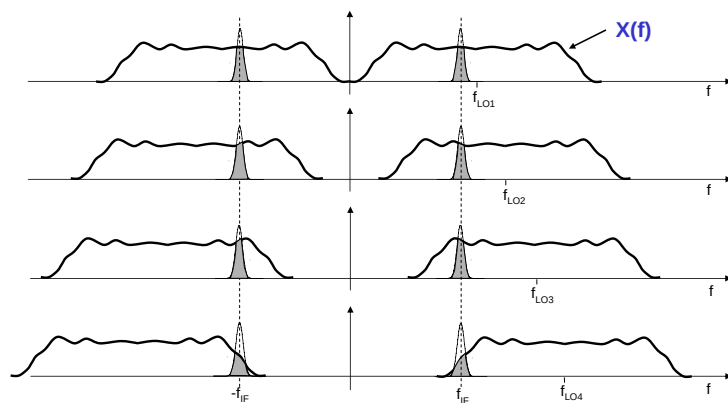
Analisi di spettro “per via analogica”

In teoria possibili diverse architetture:

- **banco di filtri selettivi** (☹ aumenta rapidamente il numero di filtri: **troppo costoso e complesso**)
- **unico filtro selettivo a sintonia variabile** (☹ un unico circuito può sintonizzarsi in un campo di frequenze la cui estensione sia di circa una ottava o, al più, una decade: **troppo poco**)
- **filtro selettivo fisso e spostamento in frequenza del segnale da analizzare** (☺ **struttura supereterodina**)

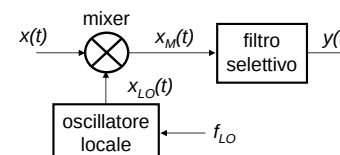
22

Principio della trasposizione in frequenza



23

Trasposizione in frequenza (2)

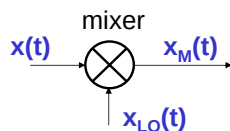


- Elementi fondamentali per realizzare una trasposizione in frequenza:
 - **Miscelatore**
 - **Oscillatore variabile**
 - **Filtro selettivo**
- La struttura basata sull'uso coordinato di un filtro selettivo, un mixer e un oscillatore locale a frequenza variabile prende il nome di **struttura a supereterodina** e costituisce l'elemento centrale di un analizzatore di spettro a scansione.

24

Miscelatore

- Per semplicità si suppone che $x_{LO}(t)$ sia un segnale sinusoidale a frequenza f_{LO} .
- Allora il mixer si può pensare come a un modulatore a prodotto, dove $x_{LO}(t)$ costituisce la portante.



$$x_M(t) = K_M \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_{LO} t)$$

$$X_M(f) = \frac{K_M}{2} [X(f - f_{LO}) + X(f + f_{LO})]$$

Lo spettro del segnale da analizzare viene traslato nell'intorno delle frequenze $\pm f_{LO}$.

25

Miscelatore (2)

- Un miscelatore è caratterizzato da:

- Ampiezza del segnale in uscita proporzionale a quella del segnale di ingresso secondo il **fattore di conversione** K_M .
- La frequenza $f_{x(M)}$ delle componenti del segnale di uscita è legata alla frequenza f_{LO} dell'oscillatore e alla frequenza f_x del segnale di ingresso da:

$$f_{x(M)} = f_{LO} \pm f_x \quad \text{se } f_{LO} > f_x \quad \underbrace{f_{x(M)} = f_x \pm f_{LO} \quad \text{se } f_{LO} < f_x}_{\text{NON UTILIZZATE}}$$

- La frequenza f_{LO} dell'oscillatore **non** è direttamente **presente** nello spettro del segnale di uscita $x_M(t)$.

26

Filtro selettivo

- Filtro passa banda simmetrico con **frequenza centrale** f_{IF} fissa e nota con precisione.
- f_{IF} è detta **frequenza intermedia** (intermediate frequency).
- Risposta all'impulso del filtro:

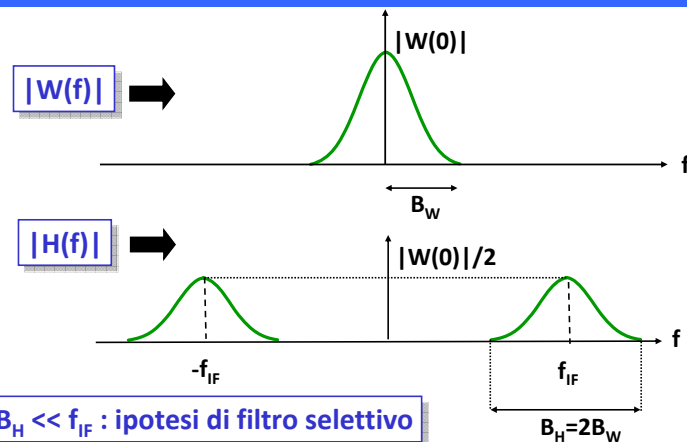
$$h(t) = w(t) \cos(2\pi f_{IF} t)$$

- $w(t)$ è detta **inviluppo del filtro** e la sua trasformata è $W(f)$.

$$H(f) = \frac{1}{2} [W(f - f_{IF}) + W(f + f_{IF})]$$

27

Filtro selettivo (2)



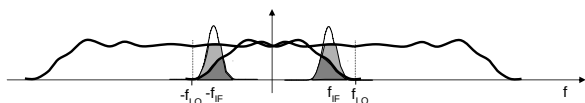
28

Scansione in frequenza

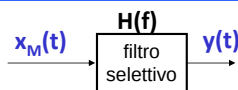
■ Sia $y(t)$ l'uscita dal filtro selettivo.

■ La trasformata di $y(t)$ è pari a $Y(f) = X_M(f) \cdot H(f)$:

$$Y(f) = \frac{K_M}{4} [X(f - f_{LO}) + X(f + f_{LO})] \cdot [W(f - f_{IF}) + W(f + f_{IF})]$$



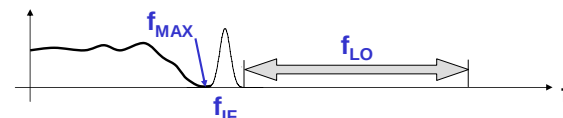
■ Se non si pone alcuna condizione sui valori ammessi per f_{LO} e f_{IF} sono **possibili interferenze** che rendono difficile l'interpretazione della risposta.



29

Scansione in frequenza (2)

Condizioni per la corretta implementazione della trasposizione in frequenza

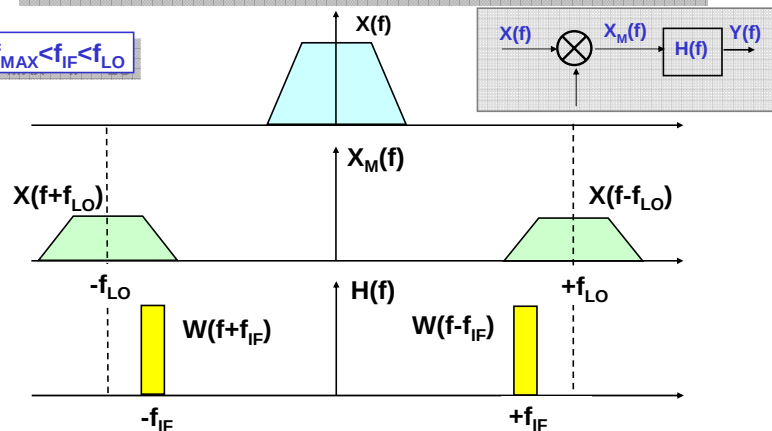


- f_{MAX} = estremo superiore del campo di frequenze analizzabili dallo strumento.
- $f_{IF} > f_{MAX}$ = frequenza centrale del filtro selettivo.
- $[f_{LO,min}, f_{LO,max}]$ = campo di variazione di f_{LO} .
- $f_{LO,min} \geq f_{IF}$ = condizione sul campo di variazione dell'oscillatore locale.

30

$$Y(f) = \frac{K_M}{4} [X(f - f_{LO}) + X(f + f_{LO})] \cdot [W(f - f_{IF}) + W(f + f_{IF})]$$

$$f_{MAX} < f_{IF} < f_{LO}$$



31

Scansione in frequenza (3)

$$Y(f) = \frac{K_M}{4} [X(f - f_{LO}) \cdot W(f - f_{IF}) + X(f + f_{LO}) \cdot W(f + f_{IF})]$$

■ Se il filtro selettivo avesse **banda passante infinitesima**, $W(f) = W_0 \delta(f)$, si avrebbe:

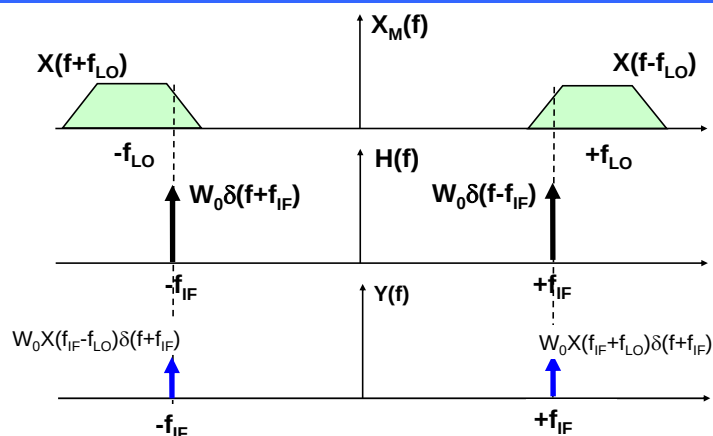
$$Y(f) = \frac{K_M \cdot W_0}{4} [X(f_{IF} - f_{LO}) \cdot \delta(f - f_{IF}) + X(f_{IF} + f_{LO}) \cdot \delta(f + f_{IF})]$$

■ In queste ipotesi, nel dominio del tempo si otterrebbe:

$$y(t) = \frac{K_M \cdot W_0}{4} |X(f_{LO} - f_{IF})| \cdot \cos(2\pi f_{IF} t - \arg[X(f_{LO} - f_{IF})])$$

32

Esempio



33

Scansione in frequenza (4)

■ Si consideri ora un filtro selettivo non ideale.

■ $y(t)$ è dato dalla convoluzione nel dominio del tempo tra $x_M(t)$ e la risposta $h(t)$ del filtro:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{K_M x(\tau)}_{x_M(\tau)} \cos(2\pi f_{LO} \tau) \cdot \underbrace{w(t-\tau) \cos(2\pi f_{IF}(t-\tau))}_{h(t-\tau)} d\tau$$

Segnale in ingresso al filtro selettivo
Risposta impulsiva del filtro selettivo

34

Scansione in frequenza (5)

■ Si definisce la funzione:

$$s_{f_{IF}-f_{LO}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) w(t-\tau) e^{-j2\pi(f_{IF}-f_{LO})\tau} d\tau$$

■ Questa funzione è detta inviluppo complesso di $y(t)$ e si può interpretare come la trasformata di Fourier della funzione $x(\tau)w(t-\tau)$ valutata alla frequenza $f=f_{IF}-f_{LO}$.

■ Dopo alcuni passaggi è possibile riscrivere $y(t)$ come:

$$y(t) = \frac{K_M}{4} |s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)| \cdot \cos(2\pi f_{IF} t - \arg[s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)])$$

35

Scansione in frequenza (6)

■ Unica condizione imposta: $x(t)$ limitato in banda.

■ La risposta di un filtro selettivo ad un segnale $x(t)$ è un segnale sinusoidale a frequenza f_{IF} , modulato sia in ampiezza che in fase.

■ Nell'ipotesi di filtro selettivo ideale con banda passante infinitesima si ottiene lo stesso risultato visto in precedenza:

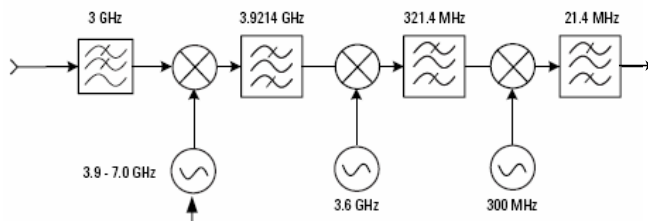
$$|s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)| = W_0 |X(f_{IF} - f_{LO})|$$

■ In generale:

$$s_{f_{IF}-f_{LO}}(t) = W(f) \cdot X(f + f_{IF} - f_{LO})$$

36

Scansione in frequenza (7)



37

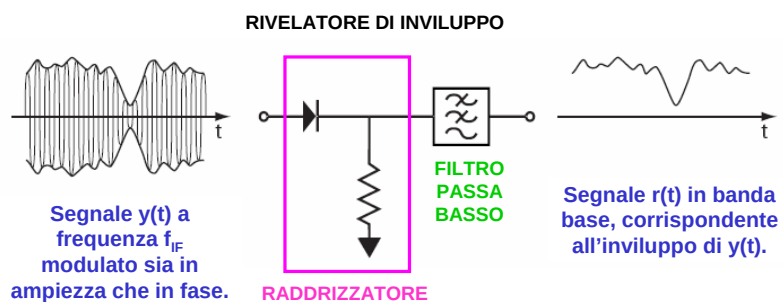
Rivelatore di inviluppo



- Permette di ottenere l'informazione di ampiezza dal segnale $y(t)$.
- Questa informazione è contenuta nel segnale: $|s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)|$
- Il **raddrizzatore** genera componenti in banda base, associate all'involuppo di $y(t)$, e componenti alla frequenza f_{IF} o multipli.
- Il **filtro passa basso** elimina le componenti in alta frequenza, isolando le componenti in banda base.

38

Rivelatore di inviluppo (2)



39

Rivelatore di inviluppo (3)

- L'uscita dal raddrizzatore dipende dal tipo di dispositivo usato:

$$r(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K_M}{2} |s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)| \quad \text{a singola semionda}$$

$$r(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{K_M}{2} |s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)| \quad \text{a doppia semionda}$$

- Il guadagno del filtro passa basso viene determinato in modo che la cascata dei due blocchi abbia guadagno unitario.
- Se il filtro passa basso ha banda passante maggiore della larghezza di banda dell'involuppo di $y(t)$ si ottiene infine:

$$r(t) = \frac{K_M}{2} |s_{f_{IF}-f_{LO}}(t)|$$

40

Rivelatore di inviluppo (4)

Un rivelatore di inviluppo deve avere:

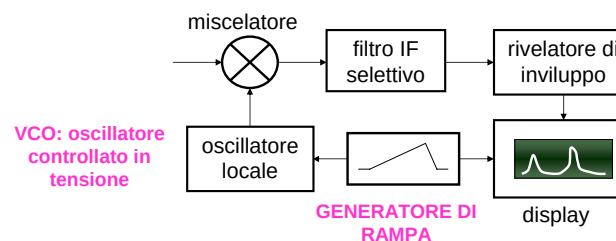
- Ampia dinamica nel campo delle ampiezze del segnale di ingresso (70-80dB).
- Ridotta distorsione.
- Filtro passa banda con banda maggiore della massima larghezza di banda utilizzabile per il filtro selettivo.

Per permettere all'utente di regolare la larghezza di banda del filtro viene utilizzato un altro filtro passa basso, detto filtro video.

Normalmente lo strumento si predispone con la banda del filtro video uguale a quella scelta per il filtro selettivo.

41

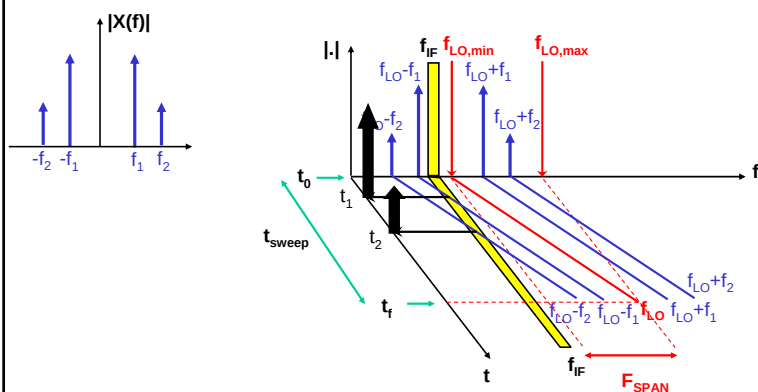
Schema funzionale



- L'oscillatore locale genera una tensione sinusoidale a frequenza f_{LO} , dipendente dalla tensione applicata in ingresso.
- Il generatore di rampa fornisce la tensione di controllo dell'oscillatore locale.

42

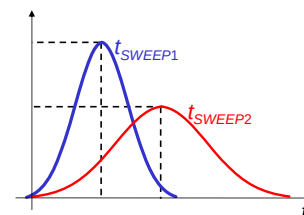
Spettro discreto: un esempio



43

Comportamento dinamico

- La frequenza f_{LO} varia linearmente nel tempo. Il rate di variazione è: F_{SPAN}/t_{SWEEP}
- Durante la scansione, un filtro selettivo con banda B_R è sollecitato da una componente sinusoidale per un tempo $\cong (B_R \cdot t_{SWEEP})/F_{SPAN}$



Curve di risposta del filtro selettivo:

- in condizioni stazionarie (t_{SWEEP1})
- scansione troppo veloce ($t_{SWEEP2} < t_{SWEEP1}$)

44

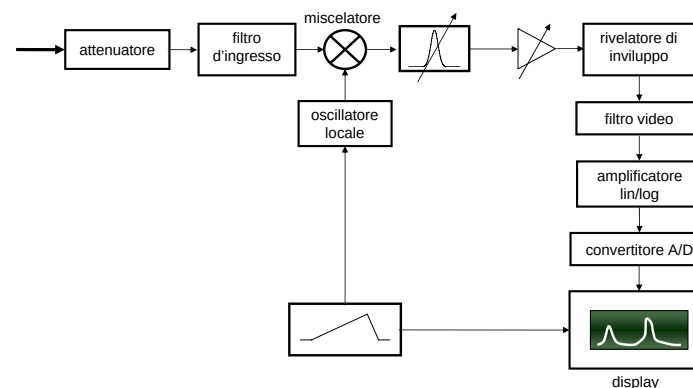
Comportamento dinamico (2)

- transitorio di risposta del filtro selettivo
- durata del transitorio legata alla selettività del filtro: $\cong 1/B_R$
- uno sweep time troppo breve (scansione veloce) causa:
 - peggioramento della risoluzione in frequenza
 - perdita di sensibilità
 - errore nella determinazione della frequenza
- criterio per l'impostazione dello strumento:

$$\frac{1}{B_R} < B_R \cdot \frac{t_{SWEEP}}{F_{SPAN}} \Rightarrow t_{SWEEP} > \frac{F_{SPAN}}{B_R^2}$$

45

Schema di un analizzatore di spettro

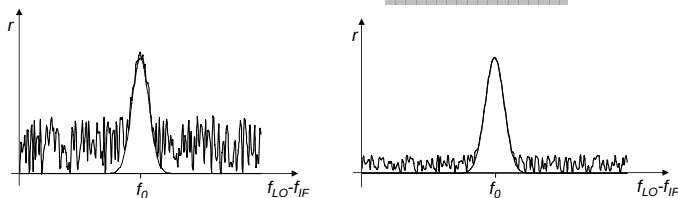


46

Filtro video

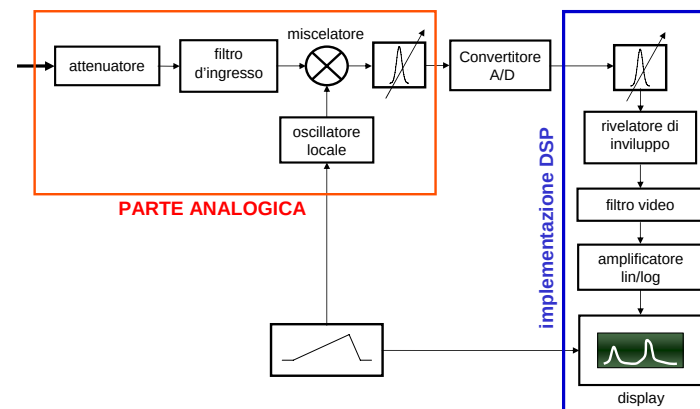
- Il filtro video ha banda passante $BV \leq BR$ e può ridurre l'effetto del rumore a larga banda (*smoothing*).
- Il filtro video ha un transitorio maggiore del filtro selettivo e quindi influisce sul tempo di scansione:

$$t_{SWEEP} > \frac{F_{SPAN}}{B_R \cdot B_V}$$



47

Schema di un analizzatore di spettro (2)



48