Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2020 (Primo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:____ Matricola:________________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\dfrac{2}{\log(5-x^2)}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. $\exp(u) := e^u$; lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Studiare, per $\beta > 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-4}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in 2 da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_2^{+\infty} f_a(x)\, dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_2^{+\infty} f_1(x)\, dx$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) - \tan(\sqrt{x})}{(e^x - 1)x^b}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \pi$.

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2020 (Primo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\dfrac{2}{\log(4 - x^2)}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. $\exp(u) := e^u$; lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Studiare, per $\beta > 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{n^\beta}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a \sqrt{x^2 - 9}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in 3 da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_3^{+\infty} f_a(x)\, \mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_3^{+\infty} f_1(x)\, \mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) - \tan(\sqrt{x})}{x^b \sin x}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = 7$.

(5.b) Enunciare il teorema delle tre funzioni (detto anche teorema dei due carabinieri).

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2020 (Primo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:____________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\dfrac{2}{\log(3-x^2)}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. $\exp(u) := e^u$; lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Studiare, per $\beta > 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\beta}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-5}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in $\sqrt{5}$ da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_{\sqrt{5}}^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_{\sqrt{5}}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \arctan(\sqrt{x})}{x^b \sin x}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = 5$.

(5.b) Enunciare il Criterio di von Leibniz per la convergenza di serie a segni alterni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2020 (Primo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\dfrac{2}{\log(2-x^2)}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. $\exp(u) := e^u$; lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Studiare, per $\beta > 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}}{n^\beta}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-6}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in $\sqrt{6}$ da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_{\sqrt{6}}^{+\infty} f_a(x)\,dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_{\sqrt{6}}^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \arctan(\sqrt{x})}{x^b(e^x-1)}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 4$.

(5.b) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica I Ing. Chimica e Materiali $\boxed{1}$

Primo Appello del 23/01/2020

Risoluzione Fila G

Esercizio 1 Studio di

$$f(x) = e^{\frac{2}{\lg(3-x^2)}} = \exp\left(\frac{2}{\lg(3-x^2)}\right)$$

1a) D_f : $\begin{cases} \lg(3-x^2) \neq 0 \\ 3-x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3-x^2 \neq 1 \\ x^2 < 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \neq 2 \\ x^2 < 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

PARITÀ : D_f è simmetrico rispetto a 0; inoltre

$$f(-x) = \exp\left(\frac{2}{\lg(3-(-x)^2)}\right) = \exp\left(\frac{2}{\lg(3-x^2)}\right) = f(x)$$

$\forall x \in D_f$ $\Rightarrow$ f è PARI.

SEGNO: $f(x) > 0$ $\forall x \in D_f$ essendo composizione di funzioni con f. più esterna data da un'esponenziale di cui è noto che l'insieme IMMAGINE è $(0, +\infty)$.

1b) Per Ponti di f si ha, se esistono, che | 2

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to(-\sqrt{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{2})^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to(-\sqrt{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{2})^-} f(x) = 3$$

dato che i punti di acc. di D_f sono $-\sqrt{3}$ (da destra) $-\sqrt{2}$ (bilatero), $\sqrt{2}$ (bilatero), $\sqrt{3}$ (da sinistra).

Calcolo 1:

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} \exp\left(\frac{2}{\underbrace{\lg(\underbrace{3-x^2}_{\downarrow\, 0^+})}_{\to -\infty}}\right)$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \exp\Big(\underbrace{\frac{2}{u}}_{\to 0^-}\Big) = 1^-$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{2})^+} \exp\left(\frac{2}{\underbrace{\lg(\underbrace{3-x^2}_{\downarrow\, 1^-})}_{\to 0^-}}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0^-} \exp\Big(\underbrace{\frac{2}{u}}_{\to -\infty}\Big) = 0^+$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{2})^-} \exp\left(\frac{2}{\underbrace{\lg(\underbrace{3-x^2}_{\downarrow\, 1^+})}_{\to 0^+}}\right)$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \exp\Big(\underbrace{\frac{2}{u}}_{\to +\infty}\Big) = +\infty$$

L'ultimo limite implica che f NON ha MASSIMO GLOBALE.

Inoltre la retta $x = \sqrt{2}$ è asintoto verticale destro mentre $x = -\sqrt{2}$ è asintoto verticale sinistro.

Non esistono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.

1c) f è composizione di f. continue in $D_f \Rightarrow$
f è continua dove definita.

f è composizione di f. derivabili in $D_f \Rightarrow$
f è derivabile dove definita.

Sia $x \in D_f$: calcoliamo $f'(x)$: si ha che

$$f'(x) = \exp\left(\frac{2}{\lg(3-x^2)}\right) \cdot \left[2\left(\lg(3-x^2)\right)^{-1}\right]'$$

$$= \exp\left(\frac{2}{\lg(3-x^2)}\right) \cdot 2\,(-1)\left(\lg(3-x^2)\right)^{-2} \frac{1}{3-x^2}(-2x)$$

$$= \frac{4x}{\underbrace{(3-x^2)}_{>0\ \forall x \in D_f}\underbrace{\left(\lg(3-x^2)\right)^2}_{>0\ \forall x \in D_f}} \underbrace{\exp\left(\frac{2}{\lg(3-x^2)}\right)}_{>0\ \forall x \in D_f}$$

Quindi
$$f'(x)>0 \iff \begin{cases} 4x>0 \\ x\in D_f \end{cases} \iff x\in(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$$

e $f'(0)=0$. Pertanto 0 è l'unico punto critico di f. Inoltre

f è strettamente crescente $\forall x\in(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$

f è " decrescente $\forall x\in(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},0)$

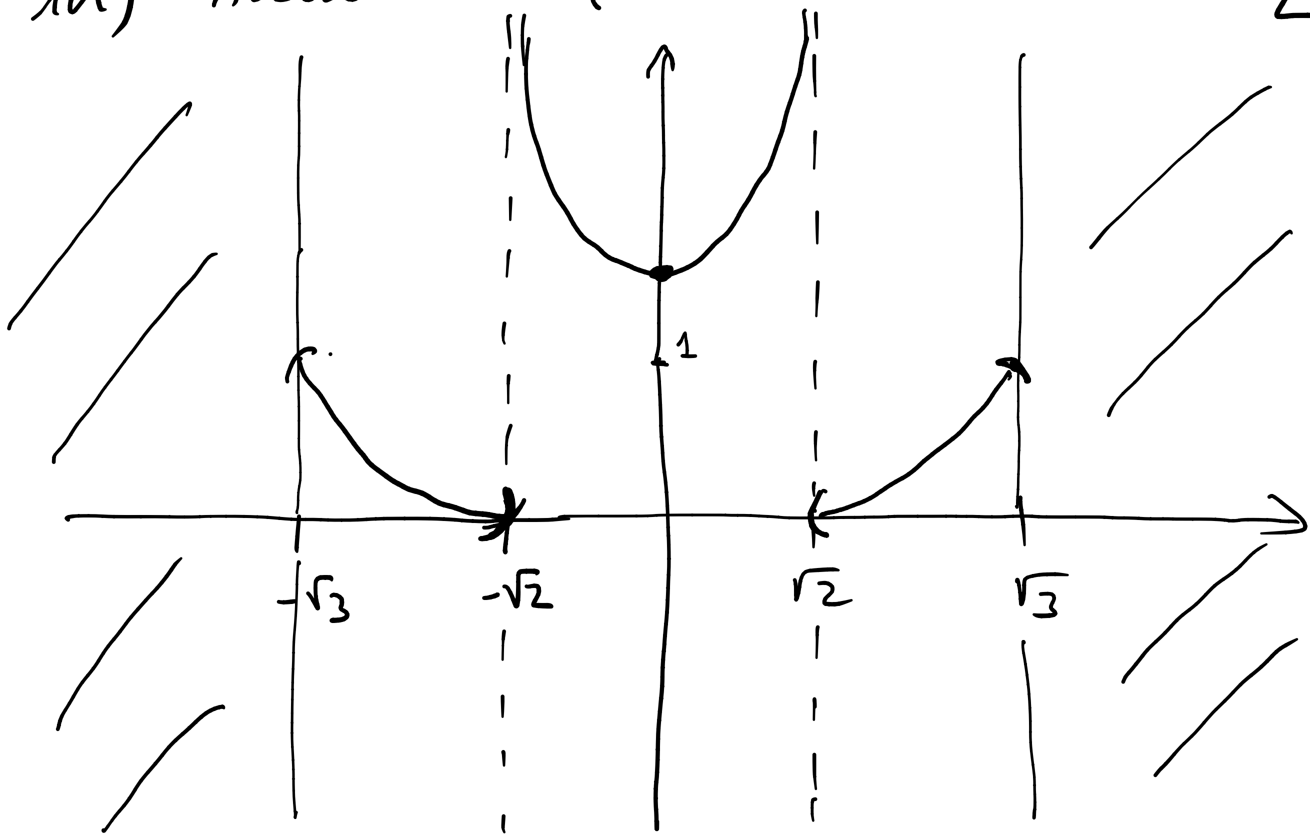
Di conseguenza: 0 è punto di MINIMO locale e $f(0)=\exp\left(\frac{2}{lg(3)}\right)$ è MINIMO locale.

Siccome $f(0)=\exp\left(\frac{2}{lg(3)}\right)>0=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}f(x)$

abbiamo che 0 <u>non</u> è di MINIMO GLOBALE.

In particolare, f NON ha minimo globale: infatti $\inf f(Im(f))=0$ (teo. limiti funzione monotone) ma
$$\nexists\,\bar{x}\in D_f \,/\, f(\bar{x})=0$$
a causa del segno di f ($f(x)>0\ \forall x\in D_f$)
[punto 1a]

1d) Andamento (non in scala)



Esercizio 2) Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\beta}} \qquad (\beta > 0).$$

Osservo che $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n}$

$$= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{\uparrow}{=} \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$$

Maclaurin $(1+x)^{\alpha} \underset{x\to 0^+}{=} 1+\alpha x+o(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi

$$(*) \quad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\beta} = \frac{1}{2\, n^{\beta+1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{\beta+1/2}}\right)$$
$$n \to +\infty$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\beta} = 0 \quad \forall \beta > 0$$ (cond. necessaria di conv. è vera)

Siccome $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\beta} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ di ordine $\beta + 1/2$

[segue da $(*)$], il criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie ci permette di concludere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\beta} \text{ converge} \iff \beta + 1/2 > 1$$
$$\iff \beta > 1/2 .$$

Esercizio 3) $a \in \mathbb{R}$ e $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a \sqrt{x^2-5}}$

3a) ordine di infinito per $x \to (\sqrt{5})^+$:

$\alpha > 0$

$$\lim_{x \to (\sqrt{5})^+} \frac{f_a(x)}{\frac{1}{(x-\sqrt{5})^\alpha}} = \lim_{x \to (\sqrt{5})^+} \frac{(x-\sqrt{5})^\alpha}{x^a \sqrt{x^2-5}}$$

$$= \lim_{x \to (\sqrt{5})^+} \frac{1}{x^a} \frac{(x-\sqrt{5})^\alpha}{(x-\sqrt{5})^{1/2}(x+\sqrt{5})^{1/2}}$$

$$= \lim_{x \to (\sqrt{5})^+} \frac{1}{x^a} \frac{1}{(x+\sqrt{5})^{1/2}} (x-\sqrt{5})^{\alpha - 1/2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/2 \\ \dfrac{1}{(5)^{a/2}\sqrt{2\sqrt{5}}} & \text{se } \alpha = 1/2 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Quindi $f_a(x) \underset{x \to (\sqrt{5})^+}{\longrightarrow} +\infty$ di ordine $\dfrac{1}{2}$

3b) Per quali $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$?

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a \sqrt{x^2(1-5/x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a |x| \sqrt{1-5/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{a+1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-5/x^2}}}_{\to 1 \text{ per } x\to+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a<-1 \\ 1 & \text{se } a=-1 \\ 0 & \text{se } a>-1 \end{cases}$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0 \iff a>-1$.

Da quanto sopra: $(a>-1)$ $\quad \alpha>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{a+1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-5/x^2}}}_{\to 1,\ x\to+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>a+1 \\ 1 & \text{se } \alpha=a+1 \ (>0) \\ 0 & \text{se } 0<\alpha<a+1 \end{cases}$$

Pertanto $f_a(x)$ è infinitesimo per $x\to+\infty$ se e solo se $a+1>0$ e lo è di ordine $a+1$

3c) Si noti che $f_a(x)>0$ $\forall x\in(\sqrt{5}, +\infty)$,

che $\lim_{x\to\sqrt{5}^+} f_a(x) = +\infty$ di ordine $\frac{1}{2}$;

che $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$ di ordine $a+1$.

Pertanto: il criterio dell'ordine di infinito

implica che $\int_{\sqrt{5}}^{5} f_a(x)\,dx$ converge $\forall a \in \mathbb{R}$,

mentre il criterio dell'ordine di infinitesimo

implica che $\int_{5}^{+\infty} f_a(x)\,dx$ converge se e solo se $a+1>1$

cioè $a>0$.

Combinando tali risultati si ha che

$$\int_{\sqrt{5}}^{+\infty} f_a(x)\,dx \text{ converge se e solo se } a>0.$$

3d) Calcolare $\int_{\sqrt{5}}^{+\infty} f_1(x)\,dx$

$f_1(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-5}}$; usiamo la sost. consigliata

$t = \sqrt{x^2-5} - x$; $t > \sqrt{5}$ da cui segue che

$x = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{t^2+5}{t} =: g(t)$. Per il teorema di

$g(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}\frac{1}{t}$

sostituzione, si ha che

$g'(t) = -1/2 + 5/2\,t^2$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{-2t}{t^2+5} \cdot \frac{2t}{t^2-5}\; \frac{5-t^2}{2t^2}\,dt \qquad = \frac{-t^2+5}{2t^2}$$

$$\sqrt{x^2-5} = t+x = t - \frac{t}{2} - \frac{5}{2t} = t/2 - 5/2t = \frac{t^2-5}{2t}$$

10

$$= -2\int \frac{5-t^2}{(t^2+5)(5-t^2)}\,dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+5} = 2\int \frac{dt}{5\left((t/\sqrt{5})^2+1\right)}$$

$u = t/\sqrt{5}$

$\sqrt{5}u = t$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5}\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(u) + c = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(t/\sqrt{5}\right) + c$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)\right)}_{=F(x)} + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$$

$x \in (\sqrt{5}, +\infty)$

Per definizione

$$\int_{\sqrt{5}}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_{\sqrt{5}}^{5} f_1(x)\,dx + \int_{5}^{+\infty} f_1(x)\,dx$$

$$= \lim_{z\to(\sqrt{5})^+} \int_z^5 f_1(x)\,dx + \lim_{w\to+\infty} \int_5^w f_1(x)\,dx$$

$$= \lim_{z\to(\sqrt{5})^+} \left(F(5)-F(z)\right) + \lim_{w\to+\infty} \left(F(w)-F(5)\right)$$

$$= -\lim_{z\to(\sqrt{5})^+} F(z) + \lim_{w\to+\infty} F(w)$$

$$= -\lim_{z\to(\sqrt{5})^+} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\big(\overbrace{\sqrt{z^2-5}}^{\to 0^+} \overbrace{-z}^{\to -\sqrt{5}}\big)}_{\to -1}\Big) +$$

$$+ \lim_{w\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{atg}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\big(\sqrt{w^2-5}-w\big)}_{=\frac{w^2-5-w^2}{\sqrt{w^2-5}+w}}\Big)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ \lim_{w\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{atg}\Big(\overbrace{\frac{-5}{\underbrace{\sqrt{w^2-5}+w}_{\to+\infty}}}^{\to 0}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

Esercizio 4 | Calcolare ($b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg(1+\sqrt{x}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{x^3 \sin x}$$

Sia $N(x) := \lg(1+\sqrt{x}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$

Abbiamo (continuità di lg e di arctg) che

$$\lim_{x\to 0^+} N(x) = N(0) = 0.$$

Usando la f. di Mac Laurin si ha

$$\lg(1+y) = y - y^2/2 + o(y^2), \quad y \to 0^+$$

$$\operatorname{artg}(y) = y - y^3/3 + o(y^3), \quad y \to 0^+$$

e quindi

$(x>0)$

$$N(x) = \cancel{\sqrt{x}} - \frac{x}{2} + o(x) - \cancel{\sqrt{x}} + \frac{x^{3/2}}{3} + o(x^{3/2})$$

$$= -x/2 + o(x) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Quindi $N(x) \to 0$ di ordine 1 per $x \to 0^+$.

Dobbiamo studiare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{x^b \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x/2 + o(x)}{x^6 \sin x}.$$

Se $\boxed{b=0}$: si ha $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-x/2 + o(x)}{\sin x}$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{pr. sost}\\ \text{infinitesimi}}}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\frac{x}{\sin x} = -1/2$$

Se $b>0$: Si noti che $x^b \sin x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ di ordine $1+b$.

Pertanto, siccome, $N(x) \to 0$ di ordine 1

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x/2+o(x)}{x^b \sin x} = -\infty$$

Se $b<0$: il problema diviene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-b}\left(-x/2+o(x)\right)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^{1-b}}{2}+o(x^{1-b})}{\sin x} = 0$$

perché il numeratore è ora infinitesimo di ordine $1-b>1$ (Ricordare $b<0 \Rightarrow -b>0$)

e il denominatore lo è di ordine 1

(limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$\square$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2020 (Secondo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:______________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (2 - |x|)\exp(\frac{1}{x+2})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x+2)^2}.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+3}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = e^x$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

(5.b) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Dimostrare che se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2020 (Secondo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (1 - |x|) \exp(\frac{1}{x+1})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-2)^2}.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-3}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = e^{-x}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema del differenziale.

(5.b) Dimostrare il teorema di unicità del limite.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2020 (Secondo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (4 - |x|)\exp(\frac{1}{x+4})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-3)^2}.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2020 (Secondo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (3 - |x|)\exp(\frac{1}{x+3})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-4)^2}.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+3}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

(5.b) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio I, I intervallo, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica I 20/02/2020 1

II Appello a.a. 2019/2020

Primo Esercizio Studiare $f(x) = (2-|x|)\exp\left(\frac{1}{x+2}\right)$

Per il dominio di f è sufficiente imporre $x+2 \neq 0 \Rightarrow$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Siccome D_f non simmetrico rispetto 0, si ha che f non è né pari né dispari.

Segno di f: siccome $\exp(u)>0$ $\forall u\in\mathbb{R}$, si ha che

$$f(x)>0 \iff \begin{cases} 2-|x|>0 \\ x\in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} |x|<2 \\ x\in D_f \end{cases} \iff x\in(-2,2)$$

Inoltre $f(x)=0 \iff x=2$; $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Limiti: I pti di accumulazione sono: $-\infty, -2^-, -2^+, +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ (x<0)}} (2+x)\overbrace{\exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x+2}}_{\to 0^-}\Big)}^{\to 1} = -\infty$$

[$\Rightarrow$ f non ha MINIMO GLOBALE]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>0)}} (2-x)\overbrace{\exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x+2}}_{\to 0^+}\Big)}^{\to 1} = -\infty$$

[$\Rightarrow$ f non ha asintoti orizzontali a $+\infty$ e a $-\infty$]

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \underbrace{(2-|x|)}_{\to 0}\overbrace{\exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x+2}}_{\to 0^-}\Big)}^{\to -\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \underbrace{(2-|x|)}_{\to 0}\exp\Big(\overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{x+2}}_{\to 0^+}}^{\to +\infty}\Big)$$

$$= \lim_{x\to -2^+} (2+x)\exp\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$u = \frac{1}{x+2} \xrightarrow{} +\infty$ per $x \to -2^+$

$$= \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$$

per la gerarchia degli infiniti (o per limiti fatti a lezione)

$\Rightarrow$ f non ha MASSIMO GLOBALE; La retta $x=-2$ è ASINTOTO verticale destro.

Asintoti OBLIQUI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2-x}{x}}_{\to -1} e^{\overbrace{\frac{1}{x+2}}^{\to 0}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^{\frac{1}{x+2}} + x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x)\left(e^{\frac{1}{x+2}} - 1\right) + \underbrace{2e^{1/x+2}}_{\to 2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+2} \frac{e^{\overbrace{1/x+2}^{\to 0}} - 1}{\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\to 0}} + 2e^{\frac{1}{x+2}}$$

$$\underset{\text{limite notevole}}{=} \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{-x}{x+2}}_{\to -1} \cdot 1 + 2\cdot e^{\overbrace{\frac{1}{x+2}}^{\to 0}} = -1+2=1$$

limite notevole $\lim_{u\to 0^+} \frac{e^u - 1}{u} = 1$

Quindi $y = -x+1$ è ASINTOTO OBLIQUO a $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{2+x}{x}}_{\to 1} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x+2}}^{\to 0}}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} (2+x)e^{\frac{1}{x+2}} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x+2}}-1\right) + 2e^{\overbrace{1/x+2}^{\to 0}} \qquad \boxed{3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{e^{\overbrace{\frac{1}{x+2}}^{\to 0}}-1}{\frac{1}{x+2}}}_{\to 1} + 2e^{\overbrace{\frac{1}{x+2}}^{\to 0}}$$

$$\overset{\uparrow}{=} 1+2 = 3$$

limiti notevole $\dfrac{e^u-1}{u} \underset{u\to 0}{\to} 1$

$\Rightarrow y = x+3$ è asintoto obliquo a $-\infty$

<u>Continuità e derivabilità</u>: f è continua perché comp. di funzioni continue. f è derivabile tranne in 0 in cui $|x|$ non è derivabile in 0. $D_f^{der} = D_f \setminus \{0\} = \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$

<u>Sia $x>0$</u>: $f(x) = (2-x)\, e^{\frac{1}{x+2}}$

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+2}} + (2-x)\, e^{\frac{1}{x+2}} \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

$$= -e^{\frac{1}{x+2}}\left(1+\frac{2-x}{(x+2)^2}\right) = -e^{\frac{1}{(x+2)^2}}\left(\frac{x^2+4+4x+2-x}{(x+2)^2}\right)$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{(x+2)^2}\underbrace{\left(x^2+3x+6\right)}_{>0\ \forall x\in\mathbb{R}} < 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

$\Rightarrow f$ è strett. decrescente in $(0,+\infty)$

<u>Sia $x<0$, $x\neq -2$</u>: $f(x) = (2+x)\, e^{\frac{1}{x+2}}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+2}} + (2+x)\, e^{\frac{1}{x+2}}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x+2}}\left(1-\frac{2+x}{(x+2)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+2}}\left(1-\frac{1}{x+2}\right) = e^{\frac{1}{x+2}}\,\frac{x+1}{x+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} > 0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1<0 \\ x+2<0 \\ x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>-1 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<-1 \\ x<-2 \\ x<0 \end{cases} \iff x\in(-1,0)\cup(-\infty,-2)$$

$\boxed{4}$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty,-2)\cup(-1,0)$

f è " decrescente in $(-2,-1)$

il punto -1 è CRITICO, ed è punto di MINIMO LOCALE

$f(-1)=1/e$.

Inoltre 0 è punto di MASSIMO LOCALE ; $f(0)=2e^{1/2}$

Osservo che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{e^{1/x+2}}{\underbrace{(x+2)^2}_{\downarrow 4}}\underbrace{(x^2+3x+6)}_{\downarrow 6} = -\frac{3}{2}e^{1/2}$$

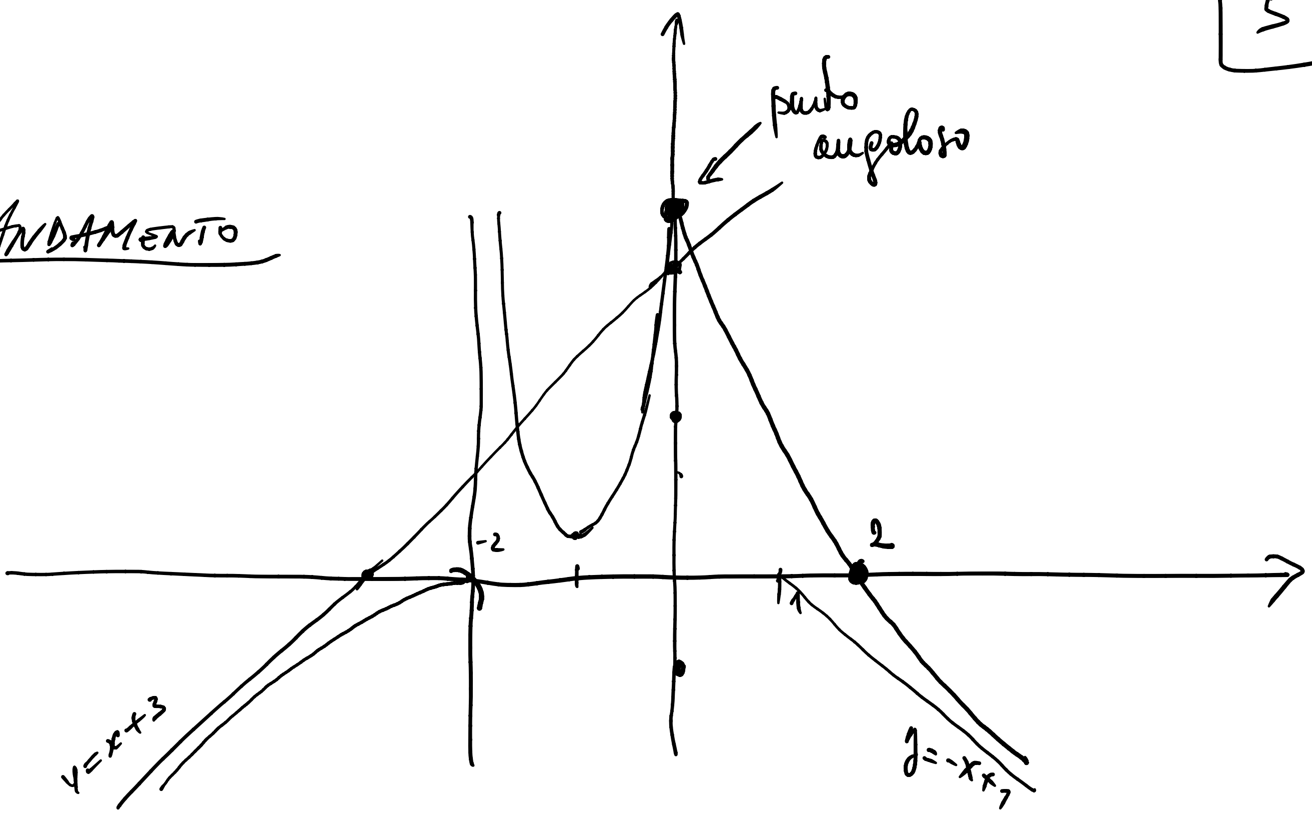
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{x+1}{x+2}}_{\downarrow 1/2} e^{1/x+2} = \frac{1}{2}e^{1/2}$$

$\frac{2}{\sqrt{e}}$

Pertanto il punto 0 è ANGOLOSO.

Andamento (nella prossima pagina)

ANDAMENTO



$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ Calcolare tutte le primitive di

$$f(x)=\frac{\arctan(x)}{(x+2)^2}$$

Integrando per parti si ha che

$$\int\frac{\arctan(x)}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{\arctan(x)}{x+2}+\underbrace{\int\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx}_{=I}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}\,;\ f(x)=-\frac{1}{x+2}$$

$$g(x)=\arctan x\,;\ g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Per calcolare I usiamo il metodo dei fratti semplici: determiniamo $A, B, C, \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}\text{, ossia}$$

$\boxed{6}$

$$A(x^2+1)+(Bx+c)(x+2)=1$$

$\cancel{2B=-C}$

$$\Leftrightarrow \quad Ax^2+A+Bx^2+Cx+2Bx+2C=1$$

da cui segue
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C+2B=0 \\ A+2C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ C=-2B \\ -B-4B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1/5 \\ C=2/5 \\ B=-1/5 \end{cases}$$; Pertanto
$$\frac{1/5}{x+2}+\frac{-1/5\,x+2/5}{x^2+1}=\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}$$

Quindi

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{5}\int\frac{x-2}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\lg|x+2|-\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{5}\lg|x+2|-\frac{1}{10}\lg(x^2+1)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x)+c$$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ c è costante con due tratti in $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ Studiare la convergenza di
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+3}$$

Sia $a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2+3} \leq \frac{n+1}{n^2+3} = a_n \quad \text{perché}$$

$\boxed{7}$

$$\frac{n+2}{n^2+2n+4} \leq \frac{n+1}{n^2+3} \iff (n+2)(n^2+3) \leq (n+1)(n^2+2n+4)$$

$$\iff \cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + 3n + 6 \leq \cancel{n^3} + n^2 + \cancel{2n^2} + 2n + 4n + 4$$

$$\iff 3n+6 \leq n^2 + 6n + 4$$

$$\iff 0 \leq n^2 + 3n - 2$$

Le radici di x^2+3x-2 sono $\frac{-3-\sqrt{17}}{2} < 0$; $\frac{-3+\sqrt{17}}{2} < 1$

pertanto $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$.

Inoltre $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+1/n)}{n^2(1+3/n^2)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1+1/n}{1+3/n^2} = 0$$

with $1+1/n \to 1$ and $1+3/n^2 \to 1$.

Possiamo pertanto applicare il Criterio di von Leibniz; quindi

$$\sum (-1)^n \frac{n+1}{n^2+3} \quad \underline{\text{CONVERGE}}$$

<u>Esercizio 4)</u> Risolvere $y'' - 6y' + 5y = e^x$

Abbiamo una eq. diff.le del II ordine a coefficienti costanti. Risolvo l'eq. diff.le omogenea associata

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

8

Sia $p(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+5$ il pol. caratteristico.

$p(\lambda)=0 \iff \lambda=1$ oppure $\lambda=5$. Pertanto tutte e sole le soluzioni dell'equazione $y''-6y'+5y=0$ sono date da

$$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{5x}\ ;\ \text{al variare di } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Si noti ora che il termine noto $f(x)=e^{x}$ è tale che $\alpha\pm i\beta=1$ è soluzione di $p(\lambda)=0$. Pertanto per il metodo di somiglianza si ha che una soluzione particolare di $y''-6y'+5y=e^x$ è $\bar{y}(x)=Axe^{x}$, con $A\in\mathbb{R}$, da determinare. Siccome $\bar{y}(x)'=Ae^{x}+Axe^{x}=Ae^{x}(1+x)$

$\bar{y}''(x)=Ae^{x}(1+x)+Ae^{x}=Ae^{x}(2+x)$ abbiamo che

$$Ae^{x}(2+x)-6A(1+x)e^{x}+5Axe^{x}=e^{x} \qquad \text{cioè}$$

$$e^{x}\left(A(2+x)-6A(1+x)+5Ax\right)=e^{x} \iff$$

$$A(2+x)-6A(1+x)+5Ax=1 \iff$$

$$2A+\cancel{Ax}-6A-\cancel{6Ax}+\cancel{5Ax}=1 \iff$$

$$-4A=1 \iff A=-1/4$$

Quindi $\bar{y}(x)=-\frac{1}{4}xe^{x}$ e tutte e sole le soluzioni di $y''(x)-5y'(x)-6y(x)=e^{x}$ sono date da

$$c_1e^{x}+c_2e^{5x}-\frac{1}{4}xe^{x}\ ,\ \text{al variare di } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2020 (Terzo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

ESAME SCRITTO IN FORMATO TELEMATICO PER EMERGENZA COVID19

Esercizio 1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia data $f_a(t) = \frac{\arctan t}{t^a}$.

(1.a) Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^1 f_a(t)\ \mathrm{d}t$ converge?

(1.b) Calcolare $\int_1^2 f_2(t)\ \mathrm{d}t$.

(1.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in $x_0 = 2$, di $F(x) = \int_2^x f_1(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 2. (2.a) Dimostrare il teorema delle tre funzioni.

(TELEMATICO) Tempo: 1 ora.
Il candidato deve consegnare scansione elettronica della risoluzione; su ogni foglio va scritto COGNOME, NOME, MATRICOLA in stampatello, ed il numero progressivo (foglio 1,2,3, ecc....). Il primo foglio va anche firmato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2020 (Terzo appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:____________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

ESAME SCRITTO IN FORMATO TELEMATICO PER EMERGENZA COVID19

Esercizio 1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia data $f_a(t) = \frac{\log(1+t)}{t^a}$.

(1.a) Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^1 f_a(t)\ \mathrm{d}t$ converge?

(1.b) Calcolare $\int_1^2 f_2(t)\ \mathrm{d}t$.

(1.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in $x_0 = 2$, di $F(x) = \int_2^x f_1(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 2. (2.a) Dimostrare il Teorema di Lagrange.

(TELEMATICO) Tempo: 1 ora.
Il candidato deve consegnare scansione elettronica della risoluzione; su ogni foglio va scritto COGNOME, NOME, MATRICOLA in stampatello, ed il numero progressivo (foglio 1,2,3, ecc....). Il primo foglio va anche firmato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Motivare tutte le risposte.

Esame di Analisi 1, III Appello 2019/20 [1]
Ing. Chimica e Materiali 26/06/2020

VERSIONE COVID

2 GRUPPI
1 esercizio
1 domanda teorica

Esercizio 1 $f_a(t) = (\arctan t)/t^a$, $a \in \mathbb{R}$

(1a) Osserviamo che per $a<0$ si ha $\boxed{2}$

$f_a(t) = t^{-a} \arctan t$ che è continua in $[0,1]$. L'integrale è di Riemann.

Per $a=0$ $f_0(t) = \arctan(t)$ che è continua in $[0,1]$. L'integrale è di Riemann.

Per $a>0$

$f_a(t)$ è definita e continua in $(0,1]$.

Inoltre $f_a(t) > 0$ $\forall t \in (0,1]$, $a>0$.

Osservo che $\lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{atg}(t)}{t^a} = \lim_{t \to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{atg}(t)}{t}}_{\to 1} t^{1-a}$

limiti notevoli

$$= \lim_{t\to 0^+} t^{1-a} = \begin{cases} 0 & 0<a<1 \\ 1 & a=1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$

Pertanto per $a \in (0,1]$, l'integrale è di Riemann (f_a prolungabile per continuità in 0).

Inoltre per $a>1$, il calcolo precedente rivela

che $f_a(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$ di ordine $\alpha = a-1$

Se $0 < a-1 < 1$, il criterio asintotico permette
$[1<a<2]$

di concludere che $\int_0^1 f_a(t)dt$ converge

(perché $f_a(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{a-1}}$, $1<a<2$).

Se $a-1 \geq 1$, il criterio asintotico permette di
$(a \geq 2)$

concludere che $\int_0^1 f_a(t)dt$ diverge. 3

In conclusione $\int_0^1 f_a(t)\,dt$ converge $\iff a<2$

(3b) Calcolare $\int_1^2 f_2(t)\,dt$.

$$f_2(t) = \frac{\arctan t}{t^2} \in C^0[1,2] \Rightarrow \text{(per il TFCI)}$$

$$\int_1^2 f_2(t)dt = F(2) - F(1)$$

dove $F(t)$ è una primitiva di f_2 in $\overset{I}{[1,2]}$.

Calcolo $F(t)$: integrando per parti si ha:

$$\int \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t}\right)' \operatorname{atg} t\,dt$$
$$f' = \frac{1}{t^2} \quad g = \operatorname{atg}(t)$$

$$= \left(-\frac{1}{t}\right)\operatorname{artg}(t) + \int \frac{dt}{t(t^2+1)} \quad ; \ t \in I$$

Cerco $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)}, \ t\in I$$

Quindi

$$\begin{array}{l} t^2 \\ t \\ \text{cost} \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}, \ t\in I.$$

Quindi

$$\int \frac{dt}{t(t^2+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt$$
$$= \lg|t| - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) + c \ ; \ t\in I \quad c\in\mathbb{R}.$$

Pertanto

$$\int \frac{\operatorname{atg}(t)}{t^2}\,dt = -\frac{\operatorname{atg} t}{t} + \lg t - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) + c$$

$c \in \mathbb{R}$; $t \in I$.

Sia $F(t) = \lg t - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) - \frac{\operatorname{atg} t}{t}$; $t \in I$.

Quindi $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{atg}(t)}{t^2}\,dt = F(2) - F(1)$

$$= \lg 2 - \frac{1}{2}\lg 5 - \frac{1}{2}\operatorname{atg} 2 + \frac{1}{2}\lg 2 + \operatorname{atg} 1$$

$$= \frac{3}{2}\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{atg} 2$$

(1C) Sia $F(x) = \displaystyle\int_2^x f_1(t)\,dt$, $f_1(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{t}$

Osserviamo che $F(2) = \displaystyle\int_2^2 f_1(t)\,dt = 0$

Inoltre $f_1(t) \in C^0((1, +\infty))$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha che $F(x)$ è derivabile in $I = (1, +\infty)$ e $F'(x) = f_1(x) = \frac{\arctan x}{x}$ per ogni $x \in (1, +\infty)$.

Pertanto $F'(2) = f_1(2) = \frac{1}{2}\arctan(2)$.

Inoltre $f_1(x)$ è derivabile in $x \in (1, +\infty)$. Quindi F è derivabile due volte in $(1, +\infty)$ e $F''(x) = f_1'(x)$; $x \in (1, +\infty)$

./.

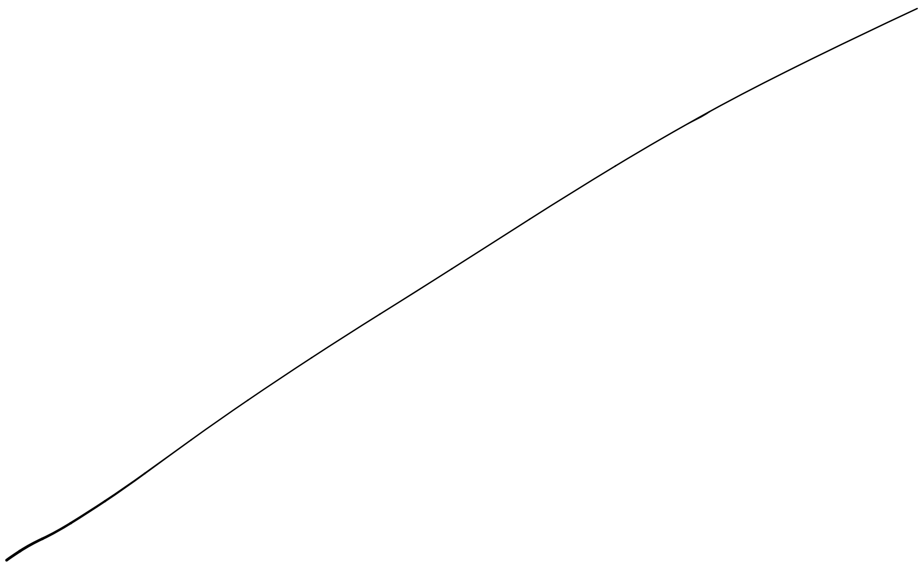
Quindi
$$F''(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x - \arctan(x)}{x^2} = \frac{x-(1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}$$

da cui segue
$$F''(2) = \frac{2-5\,\mathrm{arctg}(2)}{20}$$

La Formula di Taylor richiesta è pertanto

$$F(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{1}{2}F''(2)(x-2)^2 + o((x-2)^2)$$
$$= 0 + \frac{\mathrm{atg}(2)}{2}(x-2) + \frac{2-5\,\mathrm{atg}(2)}{40}(x-2)^2 + o((x-2)^2)$$

per $x \to 2$.



Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 18 settembre 2020 (Quarto appello, a.a. 2019-2020)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log|x^2 - 3x - 4|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. (2.a) Dimostrare il principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore.

Tempo: 1 ora.

Il candidato deve consegnare scansione elettronica della risoluzione; su ogni foglio va scritto COGNOME, NOME, MATRICOLA in stampatello, ed il numero progressivo (foglio 1,2,3, ecc. . . .). Il primo foglio va anche firmato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1, Ing. Chimica e Materiali

IV Appello 18/09/2020

Risoluzione GRUPPO 1 (Telematico - Emergenza Covid).

1) Sia $f(x) = \lg |x^2-3x-4|$

1a) f è definita per $|x^2-3x-4|>0 \iff \underbrace{x^2-3x-4}_{= (x-4)(x+1)} \neq 0$

Pertanto $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

f non ha simmetrie pari o dispari perché D_f non è simmetrico rispetto a 0.

Segno di f: $f(x) > 0 \iff |x^2-3x-4|>1$

$\iff \underbrace{(x^2-3x-4>1)}_{I}$ oppure $\underbrace{(x^2-3x-4<-1)}_{II}$

Risolvo I: $x^2-3x-5>0 \iff x < \frac{3-\sqrt{29}}{2}$ oppure $x > \frac{3+\sqrt{29}}{2}$

Risolvo II: $x^2-3x-3<0 \iff \frac{3-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

Quindi $f(x)>0$ per ogni $x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$

Inoltre $f(x) = 0 \iff |x^2-3x-4| = 1$

$\iff x^2-3x-4=1$ oppure $x^2-3x-4=-1$

$\iff x \in \left\{\frac{3-\sqrt{29}}{2}, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right\}$

Infine $f(x)<0 \iff x \in \left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, -1\right) \cup \left(-1, \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}, 4\right) \cup$

$\cup \left(4, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

1b) I punti di acc. di D_f sono: $-\infty, -1, 4, +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \lg|\underbrace{x^2-3x-4}_{\downarrow +\infty}| = +\infty \quad (\Rightarrow f \text{ NON ha MASSIMO GLOBALE})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \lg|\underbrace{x^2-3x-4}_{\downarrow +\infty}| = +\infty \quad (\Rightarrow f \text{ non ha asintoti orizzontali})$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} \lg|\underbrace{(x+1)}_{\downarrow 0^-}\underbrace{(x-4)}_{\downarrow -5}| = \lim_{u\to0^+} \lg u = -\infty \quad (\Rightarrow f \text{ NON ha MINIMO GLOBALE})$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} \lg|\underbrace{(x+1)}_{\downarrow 0^+}\underbrace{(x-4)}_{\downarrow -5}| = \lim_{u\to0^+} \lg u = -\infty \quad (\Rightarrow \text{La retta } x=-1 \text{ è ASINTOTO verticale})$$

$$\lim_{x\to4^-} \lg|\underbrace{(x+1)}_{\downarrow 5}\underbrace{(x-4)}_{\downarrow 0^-}| = \lim_{u\to0^+} \lg u = -\infty$$

$$\lim_{x\to4^+} \lg|\underbrace{(x+1)}_{\downarrow 5}\underbrace{(x-4)}_{\downarrow 0^+}| = \lim_{u\to0^+} \lg u = -\infty$$

$\Rightarrow$ La retta $x=4$ è ASINTOTO verticale.

Infine siccome $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg|x^2-3x+4|}{x} = 0$

e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\lg|x^2-3x-4|}{x} = 0$ (gerarchia degli infiniti)

abbiamo che f non ha asintoti obliqui.

1c) f è continua in D_f perché composizione di f continue.
f è derivabile in D_f " " " " derivabili:
infatti $\lg|u|$ è derivabile $\forall u\neq0$ e x^2-3x+4 è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}$.
Pertanto

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x-4} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$$

Chiaramente $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3/2$; inoltre

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x-3>0 \\ x^2-3x-4>0 \end{cases}}_{A} \cup \underbrace{\begin{cases} 2x-3<0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}}_{B}$$

Risolvo A:

$$A: \begin{cases} x>3/2 \\ x\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty) \end{cases} \quad x>4$$

<u>Risolvo B:</u> $B: \begin{cases} x < 3/2 \\ x \in (-1, 4) \end{cases} \quad \{ \; x \in (-1, 3/2)$

Quindi $f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 3/2) \cup (4, +\infty)$
$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (3/2, 4)$

Pertanto f è strettamente crescente in $(-1, 3/2) \cup (4, +\infty)$
f è " decrescente in $(-\infty, -1) \cup (3/2, 4)$

Il punto $3/2$ è punto di MASSIMO LOCALE e
$f(3/2) = \lg|5/2 \cdot (-5/2)| = \lg 25/4 = 2\lg(5/2)$ è MASSIMO LOCALE

1D) <u>Convessità</u>: siccome $f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-4}$ è rapporto di f. derivabili in D_f, si ha che f'' esiste in D_f. Inoltre

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-4) - (2x-3)^2}{(x+1)^2(x-4)^2} = \frac{-2x^2+6x-17}{\underbrace{(x+1)^2(x-4)^2}_{>0 \; \forall x \in D_f}}$$

Quindi $f''(x) > 0 \iff -2x^2+6x-17 > 0 \iff 2x^2-6x+17 < 0$
che non ha soluzioni reali essendo $\Delta = 36 - 8 \cdot 17 < 0$

Allora $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in D_f$ e quindi f è CONCAVA in D_f

<u>Andamento</u>

$f(0) = 2\lg 2$