

Date d'esame: 24/01/2018 P300-Lu3-Lu4; ore 9.00-12.00; 22/02/2018 P300-Lu3-Lu4; ore 9.00-12.00; 26/06/2018 Lu3-Lu4; ore 9.00-12.00; 18/09/2018 Lu3-Lu4; ore 9.00-12.00

Nota: A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

ARGOMENTI

SETTIMANA 1.

Lezione 1 (25/09/2017). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme \mathbb{N} . Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione: $\sum_{k=0}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$. **Un'ora è stata perduta per la mancata comunicazione del cambio aula di lezione; verrà recuperata alla fine del corso.**

Lezione 2 (26/09/2017). $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$. L'insieme \mathbb{Z} . L'insieme \mathbb{Q} . $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Definizione di fattoriale. Definizione di binomiale. Proprietà del binomiale. Esempi ed Esercizi.

Lezione 3 (27/09/2017). Disuguaglianza di Bernoulli. Binomio di Newton. L'insieme \mathbb{R} . Assioma di separazione. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera [no dim]. La funzione parte intera: cenni euristici. Esempi.

Lezione 4 (28/09/2017). $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [no dim]. Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Definizione di intervallo. Intervalli di \mathbb{R} . Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo).

SETTIMANA 2.

Lezione 5 (02/10/2017; (Battaglia)). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ [da dim a lezione]. Esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di insiemi reali.

Lezione 6 (03/10/2017). Lezione non tenuta per indisponibilità del docente. Verrà recuperata in seguito.

Lezione 7 (04/10/2017). Lezione non tenuta per indisponibilità del docente. Verrà recuperata in seguito.

Lezione 8 (05/10/2017). Lezione non tenuta per indisponibilità del docente. Verrà recuperata in seguito.

SETTIMANA 3.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 1 (09/10/2017). Ripasso su disequazioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche.

Lezione 6 (09/10/2017; (Battaglia)). Ripasso delle proprietà delle funzioni elementari: dominio, immagine, Monotonia, invertibilità per $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, $|x|$, \sqrt{x} , x^{2n} , x^{2n+1} , $\log x$, e^x , funzioni trigonometriche,

Lezione 7 (10/10/2017). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ [dimostrazione]. Applicazioni. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Suriettività e iniettività. Insieme controimmagine di una applicazione. Esempi.

Lezione 8 (11/10/2017). Grafico di una applicazione; grafico di $f + c$ e di $f(x + c)$. Somma, prodotto e rapporto di applicazioni. Composizione di applicazioni. Applicazione identica. Applicazione inversa. Esempi ed Esercizi.

Lezione 9 (12/10/2017). Grafico dell'applicazione inversa. Monotonia debole e stretta delle applicazioni. Monotonia stretta della funzione inversa. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Punti di accumulazione. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$). Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 4.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 2 (16/10/2017). Esercizi sui punti di accumulazione.

Lezione 10 (16/10/2017). Intersezioni di intorni, esempi del caso finito e infinito. Insiemi aperti e chiusi della retta reale. Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi. Osservazioni sul ruolo del punto di accumulazione rispetto al valore limite. Verifica di un limite mediante la definizione. Esempi vari.

Lezione 11 (17/10/2017). Definizione di successione. L'unico punto di accumulazione di \mathbb{N} è $+\infty$. Esempio di calcolo di limite di una successione con la definizione. Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno. Teorema del confronto I.

Lezione 12 (18/10/2017). Teorema del confronto II. Teorema delle tre funzioni. Commenti ed esempi del loro utilizzo. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$. Osservazioni su limiti e valore assoluto. La funzione di Dirichlet non ammette limite in 0.

Lezione 13 (19/10/2017). Limite della somma (dimostrato solo il caso reale), del prodotto (no dimostrato), del rapporto (no dimostrato). Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot \infty$, $0/\infty$, $\infty/0$. Limiti dall'alto e dal basso. Limite destro e sinistro.

SETTIMANA 5.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 3 (23/10/2017). Esempi ed esercizi sulla definizione di limite.

Lezione 14 (23/10/2017, (Battaglia)). Esercizi sui limiti usando teoremi del confronto, delle tre funzioni, somma, prodotto e rapporto.

Lezione 15 (24/10/2017). Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$ (no dimostrato). Non esistenza del $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$. Limiti di funzioni monotone. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = 0$. Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$. Euristica sul Teorema sui limiti per sostituzione.

Lezione 16 (25/10/2017). Teorema sui limiti per sostituzione. Definizione di funzione pari e di funzione dispari. Teorema "ponte": $f(x)$ ammette limite ℓ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se $f(a_n) \rightarrow \ell$ per $n \rightarrow +\infty$, per ogni a_n successione, $a_n \rightarrow x_0$ [no dim]. Dimostrazione che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Introduzione al numero di Nepero e .

Lezione 17 (26/10/2017). Esempio: $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{1/t^2} = +\infty$. Teorema di convergenza di $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$ ($e \in (2, 3)$, numero di Nepero). Dimostrazione di: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n! = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$ ($a > 0$). $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$.

SETTIMANA 6.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 4 (30/10/2017). Limiti per sostituzione.

Lezione 18 (30/10/2017; (Battaglia)). Esercizi su funzioni definite per casi calcolando limiti destri e sinistri con parametri.

Lezione 19 (31/10/2017). $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ [no dim]. Limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

Lezione 20 (02/11/2017). $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$. Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un insieme. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$, $\tan x$.

SETTIMANA 7.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 5 (06/11/2017). Limiti che coinvolgono i limiti notevoli.

Lezione 21 (06/11/2017; (Battaglia)). Calcolo di limiti tramite limiti notevoli su funzioni definite a tratti chiedendo di verificare uguaglianza tra limite destro e sinistro e valore della funzione nel punto. Esercizi su continuità di funzioni definite per casi.

Lezione 22 (07/11/2017). Continuità destra e sinistra. Classificazione dei punti di discontinuità. Prolungamento continuo di una funzione. Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta [no dim]. Continuità dell'inversa [no dim]. Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0 . Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$ e $\sqrt{|x|}$.

Lezione 23 (08/11/2017). Derivate delle funzioni fondamentali: a^x , c , $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, $\log_a |x|$, x^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Derivata di x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Derivata di somma, del rapporto e del prodotto. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivabilità dei polinomi.

Lezione 24 (09/11/2017; (Battaglia)). Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [no dim]. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{2x + \sin x}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \log x$, $\varepsilon > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$. Enunciato del teorema sulla derivazione di funzioni composte.

SETTIMANA 8.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 6 (13/11/2017). Alcuni calcoli di derivata: $e^{\sin x}$, $\log \log x$, x^x , $\arcsin(\sin x)$, $\arcsin(\sqrt{x-4})$. Limiti con il Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital.

Lezione 25 (13/11/2017; (Battaglia)). Esercizi sulla derivabilità di funzioni definite per casi. Esercizi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital nello studio di continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

Lezione 26 (14/11/2017). Teorema del Differenziale. Derivabilità della composta. Derivabilità dell'inversa [no dim]. Derivabilità di $\arctan x$, $\arcsin x$, x^α , $\arccos x$.

Lezione 27 (15/11/2017). Definizione di funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$. Definizione di $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \rightarrow x_0$. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi sul principio di sostituzione degli infinitesimi.

Lezione 28 (16/11/2017). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0^-$ per ogni $\alpha > 0$. Infinitesimo fondamentale. Ordine di un infinitesimo. Infinitesimi privi di ordine. Parte principale di un infinitesimo. Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi.

SETTIMANA 9.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 7 (20/11/2017). Limiti con principio di sostituzione di infinitesimi e di infiniti.

Lezione 29 (20/11/2017; (Battaglia)). Funzioni iperboliche: loro definizione, andamento, proprietà. Osservazioni sull'algebra degli o-piccoli. Limiti con principio di sostituzione di infinitesimi e di infiniti.

Lezione 30 (21/11/2017). Infinito fondamentale. Ordine di un infinito. Infiniti privi di ordine. Parte principale di un infinito. Derivate di ordine superiore al primo. Enunciato della Formula di Taylor con resto di Peano. Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$. Formula di Taylor di e^{x^2} e di e^{2x+3} centrata in $x_0 = 0$.

Lezione 31 (22/11/2017). Formule di Maclaurin per $\sinh x$, $\cosh x$, $\sin x$, $\cos x$. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

Lezione 32 (23/11/2017). Formule di Maclaurin per $\log|1+x|$, $(1+x)^a$, $\tan x$, $\tanh x$. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano. Formula di Maclaurin di $\log(\cos x)$ di ordine 4. Definizione di punti di estremali e estremi locali (relativi) e globali (assoluti).

SETTIMANA 10.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 8 (27/11/2017). Limiti con la formula di Taylor.

Lezione 33 (27/11/2017; (Battaglia)). Formula di Maclaurin di $\arctan x$. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

Lezione 34 (28/11/2017). Esistenza della successione minimizzante e massimizzante. Definizione di sottosuccessione. $a_n \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow \infty$ se e solo se per ogni sottosuccessione a_{n_k} si ha che $a_{n_k} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$. $a_n \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow \infty$ se e solo se $a_{2k} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$ e $a_{2k+1} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$. Teorema di Bolzano-Weierstrass [no dim]. Teorema di Weierstrass e teorema di Weierstrass generalizzato. Teorema degli zeri, e sue generalizzazioni.

Lezione 35 (29/11/2017). Teorema dei valori intermedi [no dim]. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno. Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ in I se e solo se $f(x) = c$ in I . $f(x)$ debolmente crescente (decescente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Esempi di utilizzo del teorema degli zeri per determinare le soluzioni di $f(x) = 0$.

Lezione 36 (30/11/2017). Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Criterio delle derivate successive. Descrizione della strategia da seguire per effettuare lo studio di funzione. Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito.

SETTIMANA 11.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 9 (04/12/2017). Esercizi su studio di funzioni.

Lezione 37 (04/12/2017; Battaglia). Funzioni convesse. Criteri di convessità con derivata la prima e seconda [no dim]. Punti di flesso. Asintoti. Esercizi su studio di funzioni.

Lezione 38 (05/12/2017). Integrali immediati. Esempi su integrali immediati. Linearità e omogeneità delle primitive. Metodo di integrazione per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima forma). Esempi su integrali per parti e su integrali per sostituzione.

Lezione 39 (06/12/2017). Teorema di integrazione per sostituzione (seconda e terza forma); esempi. Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple e delle radici complesse semplici. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$. Schema generale di integrazione delle funzioni razionali. Esempi.

Lezione 40 (07/12/2017). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici complesse multiple. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Sostituzioni consigliate nei casi: $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, per $a > 0$, $R(e^x)$, dove R è una funzione razionale. Esempi sull'integrazione delle funzioni razionali e sulle sostituzioni consigliate.

SETTIMANA 12.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 10 (11/12/2017). Esercizi di riepilogo sul calcolo delle primitive.

Lezione 41 (11/12/2017 (Battaglia)). Esercizi di riepilogo sul calcolo delle primitive con le sostituzioni consigliate: $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ per $a < 0$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(\log x)/x$, $R(\tan x)$, $R(a^{\lambda x})$, $R(\sin^\alpha x, \cos^\beta x)$, $x^m(a + bx^n)^p$.

Lezione 42 (12/12/2017). Euristiche sull'integrale di Riemann. Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. [no dim fino a qui] Disuguaglianza del valore assoluto. Teorema della media. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim]. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua.

Lezione 43 (13/12/2017). Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI) e suoi corollari. Formula fondamentale del calcolo integrale. Integrazione definita per parti [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (prima e seconda forma) [no dim]. Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t-b|^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati.

Lezione 44 (14/12/2017). Funzioni integrali composte. Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1} (-\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico per integrali su $[a, +\infty)$. Esempi. Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati.

SETTIMANA 13.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 11 (18/12/2017). Funzioni integrali composte: esercizi. Esercizi su integrali di Riemann ed impropri su insiemi illimitati e limitati.

Lezione 45 (18/12/2017, (Battaglia)). Funzioni integrali composte: esercizi. Esercizi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati e limitati. Esercizi di riepilogo su integrali.

Lezione 46 (19/12/2017). Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1} (\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie di Mengoli, serie alternante, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Proprietà delle serie. Serie a termini non negativi. Criterio del confronto [no dim]. Criterio dell'ordine di infinitesimo [no dim].

Lezione 47 (20/12/2017). Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ [no dim]. Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale $a_k = k^{-1} (\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Alcuni esempi. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice [no dim]. Criterio del rapporto [no dim]. Serie esponenziale. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esempi sulla convergenza delle serie.

Lezione 48 (21/12/2017). Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui. Equazioni a variabili separabili. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso omogeneo. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 14.

Math4U (Tarantino); Incontro n. 12 (08/01/2018). Esercizi di base sulle serie numeriche.

Lezione Suppletiva 1 (08/01/2018). [Recupero di quanto perduto nella prima ora di lezione e per vari problemi tecnici (proiettore, tablet).] Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso non omogeneo con metodo di sovrapposizione. Esercizi sulle equazioni differenziali.

Lezione Suppletiva 2 (09/01/2018). Esercizi di Riepilogo.

Lezione Suppletiva 3 (10/01/2018). Esercizi di Riepilogo.

Lezione Suppletiva 4 (11/01/2018). Esercizi di Riepilogo.