DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA

Sede Amministrativa: Università di Torino
Sedi Consorziate: Università di Genova, Politecnico di Torino

Tesi presentata per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca
VI ciclo (1990-1994)

Alessandro LANGUASCO

LA CONGETTURA DI GOLDBACH

Relatore: Prof. Alberto Perelli (Università di Genova)

1995

L'autore dichiara che il presente elaborato, presentato per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca in Matematica, non è stato utilizzato per conseguire titoli analoghi in altre università.

Indirizzo dell'autore:
Alessandro Languasco
Dipartimento di Matematica, Via L.B. Alberti 4, 16132 Genova
e-mail: languasco@dima.unige.it

Altri recapiti:
Piazza della Vittoria 4, 18100 Imperia

Ringraziamenti. Desidero ringraziare il Prof. Perelli, relatore di questa tesi, per avermi introdotto alla Teoria dei Numeri ed avermi sempre incoraggiato ed aiutato. Ringrazio inoltre il Prof. Monti Bragadin, il Prof. Carletti e tutti gli altri amici che mi hanno sostenuto durante il Dottorato di Ricerca.

1991 AMS Classification: 11P32

Indice

1. Introduzione storica

Nel 1742, in due lettere indirizzate ad Eulero, Goldbach congetturò che

ogni intero n pari, $n > 2$, è somma di due numeri primi.

Tale affermazione è oggi nota come congettura di Goldbach. Talvolta per congettura di Goldbach si intende anche l'affermazione più debole

ogni intero n pari, n sufficientemente grande, è somma di due numeri primi.

Nel seguito chiamerò "G-numero" un intero esprimibile come somma di due primi.

Nel 1923 Hardy e Littlewood [**HL23a, HL23b**] scoprirono che il loro metodo (il metodo del cerchio) poteva essere applicato con successo a tale problema. Essi provarono, sotto l'Ipotesi di Riemann Generalizzata (GRH nel seguito), che ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi (problema di Goldbach ternario) e che "quasi tutti" i numeri pari sono G-numeri.

Nel 1937 I.M. Vinogradov fu capace di rimuovere la dipendenza da GRH risolvendo quindi in modo incondizionale il problema di Goldbach ternario. La dimostrazione di tale risultato si può trovare in [**Vau81**], cap.3, oppure in [**Dav80**], cap. 26.

Nel 1952 Linnik [**Lin52**] pose il problema della distribuzione dei G-numeri in intervalli corti e, applicando il metodo del cerchio, provò, assumendo l'Ipotesi di Riemann (RH nel seguito), che ogni intervallo del tipo $[N, N+H]$, con N sufficientemente grande e $H \geq \log^{3+\varepsilon} N$, contiene almeno un G-numero.

Vari progressi sono stati compiuti negli ultimi 40 anni. Nei vari capitoli di questa tesi esamineremo i risultati più importanti concernenti diversi aspetti della congettura di Goldbach.

Nel capitolo 1 esamineremo il teorema di Chen (1973) che fornisce una "approssimazione" del problema di Goldbach, ossia la rappresentabilità di un intero pari come somma di un primo e di un "quasi-primo" (un quasi-primo è un intero che ha al più due fattori primi). Il teorema di Chen utilizza le tecniche di crivello sviluppate da Brun negli anni '20 (vedi ad. es. [**Bru19**]) ed alcune tecniche analitiche sviluppate per lo studio della distribuzione dei primi nelle progressioni aritmetiche.

Nel capitolo 2 ci occuperemo della cardinalità dell'insieme "eccezionale" del problema di Goldbach (cioè dell'insieme degli interi pari che non sono G-numeri) sia da un punto di vista incondizionale sia assumendo alcune ipotesi classiche della teoria dei numeri. La prima parte del capitolo è dedicata all'importante lavoro (incondizionale) di Montgomery-Vaughan (1975), mentre la seconda parte contiene la versione moderna del lavoro di Hardy-Littlewood (1923) (sotto GRH), che per primi fornirono una stima della cardinalità dell'insieme eccezionale.

Il capitolo 3 riguarda lo studio dell'insieme eccezionale in intervalli corti (ossia considerato l'intervallo $[N, N+H]$, con $H = o(N)$, si danno condizioni su H affinché l'insieme eccezionale ristretto a $[N, N+H]$ sia di cardinalità $o(H)$). Esamineremo il risultato incondizionale di Perelli-Pintz (1992) ed il risultato condizionale (sotto GRH) di Kaczorowski-Perelli-Pintz (1994).

Il capitolo 4 riguarda lo studio dell'esistenza di numeri di Goldbach in intervalli corti (ossia considerato l'intervallo $[N, N+H]$, con $H = o(N)$, si danno condizioni su H affinché in

$[N, N+H]$ esista almeno un numero di Goldbach). Esamineremo il risultato incondizionale di Ramachandra (1973)-(1976) e Montgomery-Vaughan (1975) e i risultati condizionali di Kátai (1967), Montgomery-Vaughan (1975), Goldston (1990) e Languasco-Perelli (1994) (sotto RH), di Goldston (1990) (sotto RH e la congettura di Montgomery (MC nel seguito)) e di Friedlander-Goldston (1992) (sotto RH, MC e la congettura di Elliott-Halberstam (EH nel seguito)).

Quest'ultimo capitolo contiene alcuni risultati originali ottenuti in collaborazione con il Prof. A. Perelli.

2. Notazioni

Useremo le seguenti notazioni.

k, l, m, n, N	interi;
$A, B, C, c, c_1, \ldots$	costanti positive (non necessariamente le stesse in ogni ricorrenza);
$s = \sigma + it$	variabile complessa;
t, u, x, y	variabili reali;
δ, ε	numeri arbitrariamente piccoli (non necessariamente gli stessi in ogni ricorrenza);
(a, b)	massimo comun divisore di a e b;
$\displaystyle\sum_{a=1}^{q}{}^{*} = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$;	
$\displaystyle\bigcup_{a=1}^{q}{}^{*} = \bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$;	
$\log x$	logaritmo naturale di x;
$p, p_1, \ldots$	numeri primi;
χ	carattere di Dirichlet;
χ_0	il carattere principale;
$\displaystyle\sum_{\chi(q)}{}^{*} = \sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi \text{ primitivo}}}$;	
$\lvert\mathcal{A}\rvert$	numero di elementi dell'insieme $\mathcal{A}$;
$\rho = \beta + i\gamma$	generico zero della funzione ζ di Riemann o delle funzioni L di Dirichlet;
$N(\sigma, T, \chi)$	il numero di zeri ρ di $L(s,\chi)$ con $\beta \geq \sigma$ e $\lvert\gamma\rvert \leq T$;
$\lvert\lvert\alpha\rvert\rvert = \min\{\lvert\alpha - n\rvert : n \in \mathbb{N}\}$;	
$\Lambda(n)$	la funzione di von Mangoldt: $\Lambda(n) = \log p$ se $n = p^m$ e zero altrimenti;
$\mu(n)$	la funzione di Möbius: $\mu(n) = (-1)^k$ se $n = p_1 \ldots p_k$, zero altrimenti e $\mu(1) = 1$;
$\varphi(n)$	la funzione di Eulero: $\varphi(n) = n \prod_{p\mid n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$;
$\nu(n)$	il numero di divisori primi distinti di n;
$d(n)$	il numero di divisori positivi di n;

$\pi(x) = \sum_{p\le x} 1;$	
$\theta(x) = \sum_{p\le x} \log p;$	
$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n);$	
γ	la costante di Eulero
$f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$	significa $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, con x_0 eventualmente anche ∞;
$f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$	significa $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, con x_0 eventualmente anche ∞;
$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$	significa $\vert f(x)\vert \le Cg(x)$ per x in un intorno di x_0, eventualmente anche ∞, e qualche costante assoluta C;
$f(x) \ll g(x)$ per $x \to x_0$	significa $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$;
$f(x) \gg g(x)$ per $x \to x_0$	significa $g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$;
$f(x) \asymp g(x)$ per $x \to x_0$	significa $g(x) \ll f(x) \ll g(x)$ per $x \to x_0$;
$R(n) = \sum_{h+k=n} \Lambda(h)\Lambda(k)$	il numero di rappresentazioni, pesato, di n come somma di due primi;
$L = \log N;$	
Q	il livello della dissezione di Farey;
P	il livello degli archi maggiori della dissezione di Farey;
$I = [1/Q, 1 + 1/Q];$	
$I_{q,a} = \left\{\frac{a}{q} + \eta,\ \eta \in \xi_{q,a}\right\}$	l'arco di Farey centrato in $\frac{a}{q}$, con $\xi_{q,a} \subset \left(-\frac{1}{qQ}, \frac{1}{qQ}\right)$;
$\mathfrak{M} = \bigcup_{q\le P} \bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} I_{q,a}$	gli archi maggiori;
$\mathfrak{m} = I \setminus \mathfrak{M}$	gli archi minori;
$S(\alpha) = \sum_{n\le N} \Lambda(n)e(n\alpha)$	il polinomio trigonometrico per il problema di Goldbach;
$T(\alpha) = \sum_{n\le N} e(n\alpha)$	il polinomio trigonometrico approssimazione di $S(\alpha)$ "vicino" ad $\alpha = 0$;
$c_q(m) = \sum_{a=1}^{q}{}^{*}\, e\left(\frac{ma}{q}\right)$	la somma di Ramanujan;
$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{q}{}^{*}\, \chi(a)e\left(\frac{a}{q}\right)$	la somma di Gauss.

Indicheremo inoltre con

$$\mathfrak{S}(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right) & \text{se } n \text{ è pari, } n \neq 0 \end{cases}$$

la "serie singolare" del problema di Goldbach.

3. Prerequisiti

P1. Sommazione parziale di Abel.

Sia $a(n)$ una funzione aritmetica. Sia $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$, dove $A(x) = 0$ per $x < 1$. Suppongo che f sia $C^1([y, x])$. Allora si ha

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Apo76**], Teorema 4.2.

P2. Lemma di Gallagher.

Sia $S(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)e(nt)$, $a(n) \in \mathbb{C}$ e valga $\sum_n |a(n)| < \infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$, se δ, T sono numeri reali positivi verificanti $\delta T \leq 1 - \varepsilon$, si ha

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\, dt \ll_\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |A_\delta(x)|^2\, dx,$$

dove

$$A_\delta = \frac{1}{\delta} \sum_{|n-x|<\delta/2} a(n).$$

Il lemma di Gallagher è una versione approssimata del caso seguente del teorema di Plancherel:

Sia $\delta > 0$. Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|S(t)\hat{F}_\delta(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_\delta(x)|^2\, dx,$$

dove

$$F_\delta(t) = \begin{cases} 1/\delta & \text{se } |t| < \delta/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad \hat{F}_\delta(t) = \frac{\sin \pi\delta t}{\pi\delta t}.$$

Per la dimostrazione si vedano ad esempio [**Gal70**] oppure [**Mon71**].

P3. Regione priva di zeri di $L(s, \chi)$.

Sia $\chi \pmod q$ un carattere di Dirichlet. Esiste allora una costante $c_1 > 0$ tale che $L(s, \chi) \neq 0$ in

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log(q(|t| + 2))} \qquad t \in \mathbb{R}$$

tranne al più per uno zero reale semplice $\tilde{\beta} < 1$ (detto zero di Siegel o zero eccezionale). Nel caso in cui tale $\tilde{\beta}$ esista il carattere $\tilde{\chi}$ associato è reale, $\tilde{\chi} \neq \chi_0$.

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Dav80**].

P4. Teorema di Landau.

Siano $\chi_1 \pmod{q_1}$ *e* $\chi_2 \pmod{q_2}$ *due caratteri primitivi distinti, con* $1 < q_1 \le q_2$. *Se* $L(s,\chi_1)$ *e* $L(s,\chi_2)$ *hanno zeri reali* β_1, β_2 *rispettivamente, allora*

$$\min(\beta_1,\beta_2) < 1 - \frac{c_2}{\log(q_1 q_2)}$$

dove $c_2 > 0$ *è una costante opportuna.*
Da ciò segue che al più un carattere reale $\chi \pmod{q}$ *è tale che* $L(s,\chi)$ *si annulla nella regione* $\sigma > 1 - \dfrac{c_1}{\log(q(|t|+2))}$, $t \in \mathbb{R}$, *a patto di scegliere* c_1 *sufficientemente piccola.*

Per la dimostrazione si veda [**Dav80**].

P5. Teorema di Siegel.
Sia $\varepsilon > 0$ *e* $\chi \pmod{q}$ *un carattere reale primitivo,* $\chi \neq \chi_0$. *Esiste allora una costante* $c(\varepsilon) > 0$ *ineffettiva tale che, detto* β_0 *lo zero di Siegel (se esiste), si ha*

$$\beta_0 < 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

Per la dimostrazione si veda [**Dav80**].

P6. Fenomeno di Deuring-Heilbronn.
Sia β_1 *uno zero eccezionale per* $L(S,\chi_1)$. *Esistono allora due costanti* $c_1, c_2 > 0$ *tali che se*

$$1 - \beta_1 \le \frac{c_2/e}{\log T} \quad \text{con} \quad |t| \le T,\ T \ge 2$$

allora $L(s,\chi) \neq 0$ *in*

$$\sigma \ge 1 - c_1 \frac{\log\left(\frac{c_2}{(1-\beta_1)\log T}\right)}{\log T} \quad \text{con} \quad |t| \le T,\ T \ge 2$$

per tutti i caratteri primitivi χ *di modulo* $q \le T$, *salvo* χ_1.

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Bom87**].

P7. Formula esplicita per $\psi(x)$.
Siano $\rho = \beta + i\gamma$ *gli zeri non banali di* $\zeta(s)$. *Allora per* $T \ge T_0$ *si ha*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \le T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(xT^{-1}(\log xT)^2\right) + O(\log x)$$

uniformemente su T.

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Ivi85**].
P8. Primi in intervalli corti.
Sia $x^{7/12+\varepsilon} \le h \le x$. *Allora*

$$\psi(x+h) - \psi(x) = (1+o(1))h.$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Ivi85**], oppure, per una versione più forte, [**HB82b**]
.

P9. Primi in "quasi tutti" gli intervalli corti.
Sia $x^{1/6+\varepsilon} \leq h \leq x$. *Allora per quasi tutti gli* x *si ha*

$$\psi(x+h) - \psi(x) = (1+o(1))h.$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Ivi85**].

P10. Teorema di Brun-Titchmarsh.
Sia $1 \leq q < h \leq x$. *Allora*

$$\pi(x+h; q, a) - \pi(x; q, a) < \frac{2h}{\varphi(q)\log(h/q)}.$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**MV73**].

P11. Teorema di Bombieri-Vinogradov.
Per ogni fissata costante $A > 0$ *esiste una costante* $B = B(A)$ *tale che*

$$\sum_{q \leq Q} \max_{y \leq x} \max_{(a,q)=1} \left| \psi(x; q, a) - \frac{x}{\varphi(q)} \right| \ll x(\log x)^{-A},$$

per $Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-B}$.

Per la dimostrazione si veda [**Bom87**].

P12. Teorema di densità di Huxley.

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi) \ll \begin{cases} (qT)^{\frac{3}{2-\sigma}(1-\sigma)}(\log qT)^c & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4} \\ (qT)^{\frac{3}{3\sigma-1}(1-\sigma)}(\log qT)^c & \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Per la dimostrazione vedi ad esempio [**Ram76**].

P13. Teorema di Dirichlet.
Sia α un numero reale. Allora per ogni numero reale $X \geq 1$ esiste un numero razionale $\frac{a}{q}$ con $(a,q) = 1$, $1 \leq q \leq X$ tale che

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qX}.$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Vau81**].

P14. Stime di $S(\alpha)$.

Siano $q \leq N$, $(a,q)=1$, *e* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. *Allora*

$$S(\alpha) \ll \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq} + N^{4/5}\right) L^3.$$

Inoltre, se $R \leq q \leq \frac{N}{R}$ e $R \leq N^{3/8}$, si ottiene

$$S(\alpha) \ll N R^{-1/2} L^3.$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [**Vau81**].

4. Tecniche

I risultati che proveremo nei capitoli seguenti saranno ottenuti utilizzando le seguenti tecniche di cui esponiamo le linee principali.

a) Metodo di crivello.

Il testo di riferimento è Halberstam-Richert [**HR74**].

I metodi di crivello si basano sulla seguente idea.
Dato un insieme finito di interi $\mathcal{A}$, un insieme di primi $\mathcal{B}$ ed un numero $z \geq 2$, si rimuovono (si "crivellano") da $\mathcal{A}$ tutti quegli elementi che sono divisibili per qualche primo $p \in \mathcal{B}$, $p < z$.

Indicando con $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N}, p \text{ primo}\}$, $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}$ e

$$P(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{B}}} p$$

il problema è allora stimare la "funzione di crivello"

$$S(\mathcal{A},\mathcal{B},z) = |\{a : a \in \mathcal{A}, (a, P(z)) = 1\}|.$$

I crivelli moderni consistono in opportune tecniche che consentono di ottenere stime dall'alto, e in taluni casi anche dal basso, per tale funzione, a partire da opportune informazioni sulle quantità

$$\mathcal{A}_q = \{a : a \in \mathcal{A}, a \equiv 0 \pmod q\}.$$

Usualmente il problema delle minorazioni per $S(\mathcal{A},\mathcal{B},z)$ è più difficile.

La moderna teoria di crivello è nata tra il 1915 ed il 1924 quando il matematico norvegese Viggo Brun introdusse alcune importanti variazioni combinatorie al classico crivello di Eratostene. Da allora la teoria si è molto sviluppata ed ha portato alla nascita di due tipologie principali :

a) crivello combinatorio,
b) crivello di Selberg.

Il crivello di Brun appartiene al tipo a), mentre il secondo tipo fu introdotto da Selberg nel 1947.

Il pregio principale dei metodi di crivello è quello di costituire un metodo generale che può essere applicato a vari problemi della teoria dei numeri. In alcuni casi essi consentono di ottenere risultati anche quando le tecniche analitiche falliscono.

Sebbene il ruolo dei metodi di crivello rimanga fondamentale, è opinione generale che essi non siano in grado di fornire una soluzione al problema di Goldbach.

I risultati parziali riguardanti la congettura di Goldbach provati utilizzando i metodi di crivello sono del tipo

ogni intero N pari sufficientemente grande si può scrivere come

$$N = a + b$$

dove a ha al più r_1 divisori primi e b ne ha al più r_2.

Descrivendo tali risultati mediante la coppia (r_1, r_2), la storia delle "approssimazioni" al problema di Goldbach è la seguente

1919	Brun	$(9, 9)$,
1924	Rademacher	$(7, 7)$,
1932	Estermann	$(6, 6)$,
1937	Ricci	$(5, 7), (4, 9), (3, 15), (2, 366)$,
1938	Buchstab	$(5, 5)$,
1939	Tartakovski	$(4, 4)$,
1947-48	Renyi	$(1, c)$,
1967	Buchstab	$(1, 3)$.

Nel 1966 Chen annunciò e nel 1973 fornì la dimostrazione completa, che esponiamo nel capitolo 1, del caso $(1, 2)$.

b) Metodo del cerchio.

Il testo di riferimento è Vaughan [**Vau81**].

La filosofia generale del metodo è quella di ricondurre un problema additivo (e quindi anche il problema di Goldbach) all'analisi di Fourier di polinomi o serie trigonometriche. Per rendere meno generale l'esposizione presentiamo il metodo ricorrendo alla sua applicazione al problema di Goldbach ternario.

Indichiamo con

$$r_3(N) = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=N \\ k_i \le N}} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3),$$

la funzione che conta il numero di rappresentazioni "pesate" di un intero N come somma di tre primi e sia $S(\alpha) = \sum_{k \le N} \Lambda(k)e(k\alpha)$.

La relazione fondamentale del metodo del cerchio è fornita dall'ortogonalità dei caratteri additivi, cioè

$$r_3(N) = \int_0^1 S(\alpha)^3 e(-N\alpha)d\alpha.$$

Tale relazione consente quindi di esprimere un problema additivo in modo analitico.

Suddividiamo $(0, 1)$ in sottointervalli per mezzo della cosiddetta "**dissezione di Farey**". Considerato un parametro Q prendiamo l'insieme delle frazioni di Farey di ordine Q

$$F_Q = \{\frac{a}{q} : 1 \le q \le Q, 0 \le a \le q, (a, q) = 1\}$$

e definisco gli archi di Farey vicino a tali frazioni, tranne $0/1$, come segue.

Siano $\frac{a'}{q'} < \frac{a}{q} < \frac{a''}{q''}$ tre frazioni di Farey consecutive in F_Q e poniamo

$$\mathcal{M}(q,a) = \mathcal{M}_Q(q,a) = \Big(\frac{a+a'}{q+q'}, \frac{a+a''}{q+q''}\Big], \quad \text{per } \frac{a}{q} \neq \frac{1}{1}, a \neq 0,$$

$$\mathcal{M}(1,1) = \mathcal{M}_Q(1,1) = \Big(1 - \frac{1}{Q+1}, 1 + \frac{1}{Q+1}\Big].$$

Tali intervalli sono disgiunti e si ha

$$\bigcup_{q=1}^{Q} \bigcup_{a=1}^{q}{}^{*} \mathcal{M}(q,a) = \Big(\frac{1}{Q+1}, 1 + \frac{1}{Q+1}\Big].$$

Sfruttando la periodicità di $S(\alpha)$ si può integrare su ogni intervallo di lunghezza 1, quindi

$$r_3(N) = \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int_{\mathcal{M}(q,a)} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha.$$

Denoteremo

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q=1}^{P} \bigcup_{a=1}^{q}{}^{*} \mathcal{M}(q,a),$$

dove $P < Q$ è un parametro e $\mathfrak{m} = (0,1) \setminus \mathfrak{M}$. Chiameremo $\mathfrak{M}$ **archi maggiori** e $\mathfrak{m}$ **archi minori**.

Ponendo $\alpha = \frac{a}{q} + \eta$ si ottiene allora

$$r_3(N) = \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} e(-na/q) \int_{\xi_{q,a}} S(\frac{a}{q} + \eta)^3 e(-N\eta) d\eta, \tag{0.1}$$

dove $\xi_{q,a}$ è l'intervallo traslato

$$\xi_{q,a} = \Big(\frac{a+a'}{q+q'} - \frac{a}{q}, \frac{a+a''}{q+q''} - \frac{a}{q}\Big] = \Big(\frac{-1}{q(q+q')}, \frac{1}{q(q+q'')}\Big],$$

per $q \neq 1$, e

$$\xi_{1,1} = \Big(\frac{-1}{Q+1}, \frac{1}{Q+1}\Big].$$

Si noti che

$$\left(\frac{-1}{2qQ}, \frac{1}{2qQ}\right) \subseteq \xi_{q,a} \subseteq \left(\frac{-1}{qQ}, \frac{1}{qQ}\right).$$

Non è difficile dimostrare, vedi [**Dav80**] cap. 26 pag. 146-147, che $\forall \alpha \in \mathcal{M}(q,a)$ si ha

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} T(\eta) + O((1+|\eta|N) q^{1/2} N \exp(-c\sqrt{L})), \quad \forall\, 1 \le q \le Q,$$

dove $c > 0$ è una costante opportuna.

Prendiamo adesso $P = L^B$ e $Q = \frac{N}{L^B}$ con $B > 0$ costante.

Quindi se $\alpha \in \mathfrak{M}$ otteniamo

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} T(\eta) + O(N \exp(-c\sqrt{L}))$$

e quindi

$$S(\alpha)^3 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} T(\eta)^3 + O(N^3 \exp(-c\sqrt{L})).$$

Il contributo degli archi maggiori all'integrale (0.1) è pertanto

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha = \sum_{q \le P} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N) \int_{\xi_{q,a}} T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta$$

$$+O(\frac{N^3}{Q} \exp(-c\sqrt{L}) \sum_{q \le P} \frac{1}{q\varphi(q)^2})$$

da cui abbiamo

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha = \sum_{q \le P} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N) \int_{\xi_{q,a}} T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta + O(\frac{N^3}{Q} \exp(-c\sqrt{L})).$$

Osservando

$$\int_{\xi_{q,a}} T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta = \int_0^1 T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta + O(\int_{1/2qQ}^{1-1/qQ} |T(\eta)|^3 d\eta)$$

ed utilizzando la disuguaglianza $T(\eta) \ll \min(N, \frac{1}{\eta})$, otteniamo

$$\int_{\xi_{q,a}} T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta = \int_0^1 T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta + O((qQ)^2).$$

Calcolando

$$\int_0^1 T(\eta)^3 e(-N\eta) d\eta = \sum_{k_1+k_2+k_3=N} 1 = \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = \frac{1}{2}N^2 + O(N),$$

deduciamo

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} N^2 \sum_{q \le P} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N) + O(Q^2 \sum_{q \le P} \frac{1}{\varphi(q)^3} q^2 |c_q(-N)|)$$

$$+O(N^2 \exp(-c\sqrt{L})).$$

Sfruttando il fatto che $|c_q(-N)| \le \varphi(q)$ segue che il primo termine d'errore nell'equazione precedente diviene

$$O(Q^2 P) = O(N^2 L^{-B})$$

e che la "coda" della serie singolare è

$$\sum_{q>P} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N) \ll \sum_{q>P} \frac{1}{\varphi(q)^2} \ll L^{-B+1}.$$

E' allora possibile scrivere $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N)$ come prodotto assolutamente convergente ottene-nendo

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N) = \prod_p \left(1 - \frac{c_q(-N)}{(p-1)^3}\right)$$

$$= \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p\nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) =: \mathfrak{S}_3(N).$$

Il contributo degli archi maggiori è infine

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} N^2 \mathfrak{S}_3(N) + O(N^2 L^{-B+1}).$$

Per gli archi minori utilizziamo l'identità di Parseval ed il teorema dei numeri primi nel modo seguente

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha \right| \le \left(\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \right) \int\limits_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$\le \left(\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \right) \int\limits_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$= \left(\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \right) (NL + O(N)).$$

Utilizzando la stima per $S(\alpha)$ vista nei Prerequisiti si ha

$$S(\alpha) \ll NL^{-B/2+3}, \ \forall \alpha \in \mathfrak{m}$$

e quindi

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^3 e(-N\alpha) d\alpha \ll N^2 L^{-B/2+4} = N^2 L^{-A}$$

se $A > 0$ fissato e $B = 2(A+4)$.

Abbiamo allora provato che

$$\forall A > 0 \qquad r_3(N) = \frac{1}{2} N^2 \mathfrak{S}_3(N) + O(N^2 L^{-A}).$$

Nel caso in cui N sia pari abbiamo $\mathfrak{S}_3(N) = 0$.

Se invece N è dispari allora $\mathfrak{S}_3(N) \approx 1$ e quindi $r_3(N) \gg N^2$ per N sufficientemente grande.

Osservando che il contributo delle potenze p^α, con $\alpha \ge 2$, a $r_3(N)$ è $\ll N^{3/2} L^2$ si ottiene il seguente risultato di I.M. Vinogradov

Ogni N intero dispari sufficientemente grande è somma di tre numeri primi ossia il problema di Goldbach ternario.

5. Risultati

Il risultato principale riguardante la decomposizione additiva di un intero pari arbitrario è il seguente

Teorema (Chen, 1973). *Ogni intero pari N sufficientemente grande si può rappresentare nella forma*

$$N = p + P_2,$$

dove con P_2 indichiamo un elemento dell'insieme dei "quasi primi" definito da $\{a \in \mathbb{N} :$ a ha al più due divisori primi $\}$.

Questo risultato verrà dimostrato nel Capitolo 1 e, a differenza dei risultati che esporremo nei capitoli seguenti, che essenzialmente sono ottenuti con il metodo del cerchio o sue varianti, si basa sulle tecniche di crivello.

Il problema successivo che si pone è quello di stimare la cardinalità dell'insieme eccezionale. Siano $E = \{2n : 2n$ non è G-numero$\}$ e $E(N) = E \cap [1, N]$. I risultati che presenteremo nel Capitolo 2 sono

Teorema (Montgomery-Vaughan, 1975). *Esiste una costante $\delta > 0$ effettivamente calcolabile tale che*

$$|E(N)| \ll N^{1-\delta} \ .$$

Teorema (Hardy-Littlewood, 1923). *Assumiamo GRH. Allora $\forall \varepsilon > 0$ si ha*

$$|E(N)| \ll N^{1/2+\varepsilon}.$$

Risulta quindi chiaro che l'uso di GRH consente di ottenere una stima migliore per l'insieme eccezionale. Ciò è dovuto al fatto che la non esistenza di zeri al di fuori della linea $\sigma = \frac{1}{2}$ consente di stimare $S(\alpha)$ in modo migliore, come vedremo nell'esposizione dei risultati.

Passando agli intervalli corti la prima questione da investigare è nuovamente la cardinalità dell'insieme eccezionale. Analogamente al caso dell'intervallo "lungo" avremo risultati migliori assumendo GRH. Nel Capitolo 3 esporremo i seguenti risultati.

Teorema (Perelli-Pintz, 1992).

Siano $\varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right)$, $A > 0$ costanti arbitrarie e $N^{7/36+\varepsilon} \le H \le N$.

Allora tutti i numeri pari in $[N, N+H]$, tranne al più $O_{\varepsilon,A}\left(HL^{-A}\right)$ eccezioni, sono G-numeri.

Sotto GRH, si può ottenere

Teorema (Kaczorowski-Perelli-Pintz, 1994).

Assumiamo GRH e sia $H \log^{-6} N \to \infty$. Allora tutti gli interi pari in $[N, N+H]$, tranne al più $O(H^{1/2} \log^3 N)$ eccezioni, sono somma di due primi.

Nel caso in cui ci si accontenti dell'esistenza di un numero di Goldbach in intervalli corti si ha il seguente risultato che proveremo nel Capitolo 4:

Teorema (Ramachandra, 1973 e 1976; Montgomery-Vaughan, 1975). *Per N sufficientemente grande si ha*

$$\sum_{n\in[N,N+N^\theta]} r(n) \gg N^\theta \ ,$$

dove $r(n) = \sum\limits_{n=p_1+p_2} 1$, $\theta > \theta_1\theta_2 + \varepsilon$ *e* θ_1 *e* θ_2 *sono due numeri positivi tali che*

(i) *ogni intervallo* $[x, x + H_1]$, *con* $H_1 \geq x^{\theta_1+\varepsilon}$, *contiene* $\gg \frac{H_1}{\log x}$ *numeri primi;*

(ii) *tutti, tranne al più* $o(\frac{X}{\log X})$, *gli intervalli della forma* $[x, x + H_2]$, $x \in \mathbb{N} \cap [1, X]$ *e* $H_2 \geq x^{\theta_2+\varepsilon}$, *contengono* $\gg \frac{H_2}{\log x}$ *numeri primi.*

Ciò significa che la densità dei numeri di Golbach in intervalli corti è collegata sia con il livello di distribuzione (θ_1) dei primi in intervalli corti che con il livello di distribuzione (θ_2) dei primi in "quasi" tutti gli intervalli corti.

Anche in questo caso assumendo opportune ipotesi sulla distribuzione degli zeri della funzione ζ di Riemann è possibile ottenere risultati nettamente migliori. Infatti si ha

Teorema (Kátai, 1967; Montgomery-Vaughan, 1975). *Assumiamo RH. Allora esiste* $C > 0$ *costante assoluta tale che, per N sufficientemente grande, l'intervallo* $[N, N+C\log^2 N]$ *contiene almeno un G-numero.*

Altre dimostrazioni, basate, a differenza di quella di Kátai e Montgomery-Vaughan, sul metodo del cerchio, sono state ottenute da Goldston (1990) e da Languasco-Perelli (1994).

Il risultato precedente può essere ulteriormente migliorato rafforzando il tipo di ipotesi sulla distribuzione degli zeri della funzione ζ di Riemann. Si ottiene così

Teorema (Goldston, 1990). *Assumiamo RH e MC. Allora esiste* $C > 0$ *costante assoluta tale che, per N sufficientemente grande, l'intervallo* $[N, N+C\log N]$ *contiene almeno un G-numero.*

Come vedremo nel capitolo 4, il metodo di Goldston ha come limite intervalli di lunghezza $\log N$. Si possono ottenere intervalli più corti assumendo ipotesi di altra natura e ritoccando il metodo fino ad ottenere:

Teorema (Friedlander-Goldston, 1993). *Assumiamo RH, MC ed EH. Allora esistono* $B, C > 0$ *costanti assolute tali che, per N sufficientemente grande, l'intervallo* $[N, N + C(\log\log N)^B]$ *contiene almeno un G-numero.*

In realtà nei tre teoremi precedenti si può ottenere, analogamente a quanto fatto da Ramachandra, che i G-numeri in $[N, N + H]$ siano una proporzione positiva degli interi pari nello stesso intervallo.

CAPITOLO 1

Il teorema di Chen

Iniziamo l'analisi dei risultati sul problema di Goldbach esaminando il teorema di Chen [**Che66, Che73**]. Tale risultato è quello che più si avvicina alla congettura di Goldbach dal punto di vista dell'uniformità su $\mathbb{N}$. Nel seguito indicheremo con P_2 un elemento dell'insieme dei "quasi primi" definito da

$$\{a \in \mathbb{N} : a \text{ ha al più due divisori primi } \}.$$

Teorema 1.1 (Chen). *Esiste N_0 tale che se N è pari e $N > N_0$ allora*

$$|\{p : p \leq N \text{ e } N-p = P_2\}| > 0.334\ \mathfrak{S}(N)\frac{N}{L^2}.$$

Tale teorema implica ovviamente il seguente

Corollario 1.1 *Ogni intero pari N sufficientemente grande si può rappresentare nella forma*

$$N = p + P_2.$$

La tecnica usata da Chen è in certo senso una summa delle tecniche di crivello (il testo di riferimento è l'Halberstam-Richert [**HR74**]) e si basa sulla seguente disuguaglianza di crivello "pesato":

$$|\{p : p \leq N \text{ e } N-p = P_2\}| \geq \tag{1.1}$$
$$\sideset{}{'}\sum_{\substack{p\leq N\\ (N-p,P(N^{1/10}))=1}} \left\{1 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{1/10}\leq p_1<N^{1/3}\\ p_1|(N-p)\\ p_1\in\mathcal{B}_N}} 1 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{1/10}\leq p_1<N^{1/3}\\ p_1|(N-p)\\ p_1\in\mathcal{B}_N}}\ \sum_{\substack{N^{1/3}\leq p_2<(N/p_1)^{1/2}\\ p_2|(N-p)\\ p_2\in\mathcal{B}_N\\ N-p=p_1p_2p_3}} 1\right\}$$

dove

$$\mathcal{B}_N = \{p \text{ primo } : p \nmid N\}\ ,$$
$$P(z) = \prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathcal{B}_N}} p$$

e $\sum'$ significa sommare con le condizioni $(N-p,N) = 1$ e $N-p$ privo di quadrati relativamente ai fattori $p_1,\ p_2$ che appaiono nelle somme successive.

E' necessario osservare che solo i primi $p \leq N$ tali che $N-p = P_2$ hanno un peso (dato dal contenuto delle $\{\dots\}$) positivo.

Ciò segue dalle seguenti considerazioni:

a) i soli valori positivi assunti dai pesi sono 1 oppure $\frac{1}{2}$;
b) se il peso vale 1 allora entrambe le somme interne a $\{\dots\}$ sono nulle; pertanto $(N-p, P(N^{1/3}))=1$ e quindi $N-p=P_2$;
c) se il peso vale $\frac{1}{2}$ allora $N-p$ ha esattamente un divisore primo $p_1 \in [N^{1/10}, N^{1/3})$; quindi $N-p$ ha esattamente un divisore primo $p_1 \in [2, N^{1/3})$ perchè non ne ha in $[2, N^{1/10})$. Segue che $N-p=p_1 m$ con m tale che $(m, P(N^{1/3}))=1$ e quindi m ha al più due divisori primi.
Ma se m avesse due divisori primi allora $N-p=p_1p_2p_3$ con $N^{1/3} \le p_2 < p_3$. Necessariamente avremmo $p_2 < (\frac{N}{p_1})^{1/2}$ (altrimenti $p_1p_2p_3 > p_1\frac{N}{p_1}=N$). Allora il peso di $N-p$ sarebbe nullo perchè riceverebbe un contributo $-\frac{1}{2}$ dalla somma doppia in $\{\dots\}$ e ciò è assurdo.
Quindi m ha a più un fattore primo ed allora $N-p=P_2$.

In pratica non si fa altro che considerare la fattorizzazione $N-p=P_3$ e poi costruire dei pesi in modo tale che gli $N-p$ con esattamente tre divisori primi abbiano peso nullo.

Procediamo adesso ad esaminare la dimostrazione del teorema di Chen. Per prima cosa, rimuovendo la condizione su $\sum'$ al costo di un errore $O(N^{9/10})$, si ha dalla (1.1) che

$$
\begin{aligned}
&|\{p : p \le N \text{ e } N-p=P_2\}| \ge \qquad (1.2)\\
&S(\mathcal{G}, \mathcal{B}_N, N^{1/10}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{1/10}\le p_1 < N^{1/3}\\ p_1\in\mathcal{B}_N}} S(\mathcal{G}_{p_1}, \mathcal{B}_N, N^{1/10})\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{1/10}\le p_1 < N^{1/3}\\ p_1\in\mathcal{B}_N}}\ \sum_{\substack{N^{1/3}\le p_2 < (N/p_1)^{1/2}\\ p_2\in\mathcal{B}_N}} \left|\left\{N-p \in \mathcal{G} \text{ t.c. } \exists\, p_3 < \frac{N}{p_1p_2} \text{ e } N-p=p_1p_2p_3\right\}\right|\\
&+O(N^{9/10})
\end{aligned}
$$

dove, dato $\mathcal{A}$ un insieme di interi, si definiscono

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{B}_N, z) = |\{a \in \mathcal{A} : (a, P(z))=1\}| \ ,$$

$$\mathcal{A}_p = \{a \in \mathcal{A} : p \mid a\}$$

e

$$\mathcal{G} = \{N-p : p \le N\}.$$

Le prime due quantità vengono stimate utilizzando il crivello di Selberg (Teorema 8.3-8.4 di [**HR74**]) in combinazione con il teorema di Bombieri-Vinogradov.

La terza quantità potrebbe essere interpretata come $S(\mathcal{G}_{p_1p_2}, \mathcal{B}_N, N^{1/10})$, ma la tecnica usata per i primi due termini non si può applicare a quest'ultimo a causa della limitazione imposta dal teorema di Bombieri-Vinogradov alla scelta dei parametri nel crivello di Selberg. Si può notare che se il teorema di Bombieri-Vinogradov valesse uniformemente per un livello di q pari a x^α, con $\alpha > \frac{1}{2}$, allora si potrebbe ottenere il teorema di Chen trattando la terza quantità con il crivello di Selberg (vedi [**HR74**], cap. 9). Il miglior α sufficiente a tale scopo é stato ottenuto da Greaves [**Gre**], $\alpha = \frac{1}{1.936} = 0.5165....$

Per poter trattare la terza quantità Chen introdusse la seguente idea (utilizzata in seguito anche da Iwaniec [**Iwa72**] ed esplicitata da Fouvry-Grupp [**FG86**]), detta "switching principle",

che possiamo descrivere in generale come segue:
supponiamo di voler stimare il numero di soluzioni dell'equazione

$$l + a = m$$

dove a è un intero positivo $l \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$,$\mathcal{M}$ sono insiemi finiti di interi positivi.
Possiamo allora crivellare l'insieme

$$\mathcal{L} + a = \{l + a : l \in \mathcal{L}\}$$

per stimare $|(\mathcal{L} + a) \cap \mathcal{M}|$, oppure passare al problema di crivellare l'insieme

$$\mathcal{M} - a = \{m - a : m \in \mathcal{M}\}$$

per stimare $|(\mathcal{M} - a) \cap \mathcal{L}|$.

L'idea, molto semplice in sè , accresce la forza della teoria di crivello consentendo di "trasportare" un problema di crivello in un altro che si ritiene più facilmente abbordabile.

Quella che esponiamo nel seguito è essenzialmente la dimostrazione originale del teorema di Chen.

Negli ultimi anni sono state presentate dimostrazioni alternative, Fouvry-Grupp [**FG86**] e Heath-Brown [**HB86**], comunque sempre dipendenti dallo "switching principle", basate sui notevoli progressi ottenuti nello studio del termine d'errore del crivello lineare, vedi Iwaniec [**Iwa80**], e della distribuzione media dei primi nelle progressioni aritmetiche, vedi Bombieri-Friedlander-Iwaniec [**BFI86**],[**BFI87**] e [**BFI89**].
E' interessante notare inoltre che Fouvry e Grupp [**FG89**] utilizzando le tecniche sopra dette e combinandole con l'uso nel crivello lineare di particolari pesi (di Laborde [**Lab79**]), sono riusciti a dare una dimostrazione del teorema di Chen che non fa uso dello "switching principle".

L'applicazione dello "switching principle" si traduce, nel nostro problema, nel voler stimare, al posto del terzo termine in (1.2), la seguente quantità

$$\left|\{p_3 : p_3 \leq \frac{N}{p_1 p_2} \text{ e } N - p_1 p_2 p_3 = p\}\right|.$$

Passiamo ora a stimare i primi due termini della (1.2).
Utilizzando il Teorema 8.3 e 8.4 di [**HR74**] combinato col teorema di Bombieri-Vinogradov (vedi cap.9 di [**HR74**]), si ha che

$$S(\mathcal{G}, \mathcal{B}_N, N^{1/10}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{1/10} \leq p_1 < N^{1/3} \\ p_1 \in \mathcal{B}_N}} S(\mathcal{G}_{p_1}, \mathcal{B}_N, N^{1/10}) \tag{1.3}$$

$$\geq \mathrm{li}(N) W(N^{1/10}) \left\{ f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F(5 - \frac{10}{t}) \frac{dt}{t} \right\} \left(1 - c_1 L^{-1/15}\right)$$

$$\geq \frac{\mathfrak{S}(N)}{2} \frac{N}{L^2} 20 e^{-\gamma} \left\{ f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F(5 - \frac{10}{t}) \frac{dt}{t} \right\} \left(1 - c_2 L^{-1/15}\right)$$

dove $W(z) = \prod_{p<z}(1 - \frac{\omega(p)}{p})$, $\omega(p) = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{se } p \nmid N \\ 0 & \text{se } p \mid N \end{cases}$ e γ è la costante di Eulero. Inoltre f, F sono le funzioni caratteristiche del crivello lineare (vedi [**HR74**], cap.8) che verificano le seguenti relazioni:

$$\int_{u_1}^{u} f(t-1)\ dt = uF(u) - u_1F(u_1) \qquad \text{per } 2 \le u_1 \le u \tag{1.4}$$

$$\int_{u_1}^{u} F(t-1)\ dt = uf(u) - u_1f(u_1) \qquad \text{per } 2 \le u_1 \le u \tag{1.5}$$

$$F(u) = \frac{2e^\gamma}{u} \qquad \text{per } 0 < u \le 3 \tag{1.6}$$

da cui si ottiene:

$$uf(u) = 2f(2) + \int_2^u F(t-1)\ dt = 2e^\gamma \log(u-1) \qquad \text{per } 2 \le u \le 4.$$

Sfruttando l'equazione precedente e applicando ripetutamente (1.4), (1.5), (1.6) si ha allora

$$5f(5) = 2e^\gamma \left(\log 4 + \int_3^4 \frac{1}{u} \left(\int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t}\ dt \right)\ du \right)$$

ed anche

$$5\int_3^{10} F(5 - \frac{10}{t})\frac{dt}{t} = 2e^\gamma \left(\log 8 + 5\int_3^4 \frac{1}{u(5-u)} \left(\int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t}\ dt \right)\ du \right).$$

Quindi si ha

$$20e^{-\gamma} \left\{ f(5) - \frac{1}{2}\int_3^{10} F(5 - \frac{10}{t})\frac{dt}{t} \right\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{1}{2}\log 2 - \int_3^4 \frac{u - \frac{5}{2}}{u(5-u)} \left(\int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t}\ dt \right)\ du \right\}. \tag{1.7}$$

Usando la stima $\log x \le \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{x+1}$ valida per $1 \le x \le 2$, otteniamo che

$$8 \left\{ \frac{1}{2}\log 2 - \int_3^4 \frac{u - \frac{5}{2}}{u(5-u)} \left(\int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t}\ dt \right)\ du \right\} \ge 2.64056$$

e quindi, dalle eq. (1.1) e (1.2), si ha

$$|\{p : p \le N \text{ e } N - p = P_2\}| > 1.32\ \mathfrak{S}(N)\frac{N}{L^2} - \frac{1}{2}S_0 \tag{1.8}$$

dove

$$S_0 = \sum_{\substack{N^{1/10} \le p_1 < N^{1/3} \le p_2 < (\frac{N}{p_1})^{1/2} \\ (p_1 p_2, N) = 1}} \left| \{p_3 : p_3 \le \frac{N}{p_1 p_2} \text{ e } N - p_1 p_2 p_3 = p\} \right|.$$

Bisogna provare una opportuna disuguaglianza per S_0. Ragionando analogamente a quanto si fa nella dimostrazione del Teorema 3.12 di [**HR74**] proviamo che

$$S_0 \le \sum_{\substack{p_1 p_2 \in \mathcal{P}_N \\ (p_1 p_2, N) = 1}} S(\mathcal{A}(p_1 p_2), \mathcal{B}_{N p_1 p_2}, z) + O(N^{11/12})$$

dove $\mathcal{P}_N = \{p_1 p_2 : N^{1/10} \le p_1 < N^{1/3} \le p_2 < (\frac{N}{p_1})^{1/2}\}$ e $\mathcal{A}(p_1 p_2) = \{N - (p_1 p_2) p \text{ con } p \le \frac{N}{p_1 p_2}\}$. Posto $r = p_1 p_2$ e $\varepsilon_0 = L^{-1/2}$ si ha

$$\sum_{\substack{n \le N/r \\ (N - rn, P(z)) = 1}} \Lambda(n) \ge \sum_{\substack{(N/r)^{1-\varepsilon_0} < p \le N/r \\ (N - rp, P(z)) = 1}} \log p >$$

$$(1 - \varepsilon_0) \log(N/r) \left[|\{p : p \le N/r, (N - rp, P(z)) = 1\}| - (N/r)^{1-\varepsilon_0} \right]$$

da cui otteniamo

$$S_0 \le (1 + 2\varepsilon_0) S_1 + O(N^{1-\varepsilon_0/3}) \tag{1.9}$$

dove

$$S_1 = \sum_{\substack{m \le N \\ (N - m, P(z)) = 1}} \Lambda_0(m)$$

e

$$\Lambda_0(m) = \sum_{\substack{p_1 p_2 n = m \\ p_1 p_2 \in \mathcal{P}_N}} \frac{\Lambda(n)}{\log(N/p_1 p_2)}.$$

Utilizzando il crivello di Selberg (vedi [**HR74**] cap.3), abbiamo che

$$S_1 \le 1.792 \ \mathfrak{S}(N) \frac{N}{L^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{L}\right)\right) + S_2$$

dove

$$S_2 = \sum_{\substack{D < z^2 \\ D | P(z)}} \frac{\mu^2(D) 3^{\nu(D)}}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi} \sum_{\substack{(\mathrm{mod}\ D) \\ \chi \ne \chi_0}} \overline{\chi}(N) \psi_0(N, \chi) \right|$$

e

$$\psi_0(N, \chi) = \sum_{m \le N} \chi(m) \Lambda_0(m).$$

Passando ai caratteri primitivi si ottiene che

$$S_2 \le S_3 L^3 + O(N^{19/20})$$

dove

$$S_3 = \sum_{\substack{1<d<z^2 \\ d|P(z)}} \frac{\mu^2(d)3^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \left| \sum_{\substack{\chi \pmod d \\ \chi\neq\chi_0}}^{*} \overline{\chi}(N)\psi_0(N,\chi) \right|$$

e, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$S_3 \ll \sqrt{S_4}\sqrt{S_5}$$

con

$$S_4 = \sum_{\substack{1<d<z^2 \\ d|P(z)}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{\chi \pmod d \\ \chi\neq\chi_0}}^{*} |\psi_0(N,\chi)|$$

e

$$S_5 = \sum_{\substack{1<d<z^2 \\ d|P(z)}} \frac{\mu^2(d)9^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \left| \sum_{\substack{\chi \pmod d \\ \chi\neq\chi_0}}^{*} \overline{\chi}(N)\psi_0(N,\chi) \right|.$$

La stima di S_4 si ottiene con calcoli diretti ed è

$$S_4 \ll NL^{18},$$

da cui

$$S_3 \ll \sqrt{N}L^9\sqrt{S_5}.$$

La stima di S_5 segue dal teorema di Siegel-Walfisz per i d tali che $1 < d < Q = L^{100}$, mentre per l'intervallo $Q < d < z^2$ si utilizza (in modo classico) la trasformata di Mellin per collegare $\psi_0(N,\chi)$ a $\frac{L'}{L}(s,\chi)$. Si ha allora

$$\psi_0(N,\chi) \ll N\int_{-T}^{T} |PM_1(a+it,\chi)|\frac{dt}{1+|t|}$$

$$+ N^{1/2}\int_{-T}^{T} |PM_2(\frac{1}{2}+it,\chi)|\frac{dt}{1+|t|} + \frac{N}{T}\int_{\frac{1}{2}}^{a} |PM_2(\sigma+iT,\chi)|\,d\sigma + \frac{N}{T}L \tag{1.10}$$

dove $a = 1+\frac{1}{L}$, e fissato u tale che $1 \le u \le z^2$, abbiamo definito

$$M_1(s,\chi) = -\sum_{n>u^2} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},$$

$$M_2(s,\chi) = -\sum_{1<n\le u^2} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}$$

e

$$P(s,\chi) = \sum_{r\in\mathcal{P}_N} \frac{\chi(r)}{r^s}\frac{1}{\log(N/r)}$$

per Re $s > 1$. Introduciamo le notazioni

$$B_0(\sigma, f) = \sum_{\substack{d<u \\ (d,N)=1}} \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{\chi}{}^{*} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it, \chi)| \frac{dt}{1+|t|},$$

$$B_1(\sigma, f) = \sum_{\substack{d<u \\ (d,N)=1}} \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{\chi}{}^{*} |f(\sigma + it, \chi)|.$$

Dalla (1.10) segue che

$$\sum_{d<u} \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{\chi^*} |\psi_0(N, \chi)| \ll N B_0(a, PM_1) + N^{1/2} B_0(\frac{1}{2}, PM_2)$$
$$+ \frac{N}{T} \max_{\frac{1}{2} \le \sigma \le a} \left(B_1(\sigma, PM_2) + L \right).$$

La disuguaglianza di crivello largo fornisce le seguenti stime

$$B_1(\sigma, P^2) \ll (u^2 + N^{2/3}) L^{-2}$$
$$B_1(\sigma, M_2^2) \ll u^2 L^2 \ ,$$

se $\frac{1}{2} \le \sigma \le a$, e, se $T \ll N^2$,

$$B_0(a, P^2) \ll (\frac{u^2}{N^{13/30}} + L^3) \frac{1}{L},$$
$$B_0(\frac{1}{2}, P^2) \ll (u^2 + N^{2/3}) \frac{1}{L},$$
$$B_0(a, M_1^2) \ll L^4,$$
$$B_0(\frac{1}{2}, M_2^2) \ll u^2 L^3.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, otteniamo

$$\sum_{d<u} \frac{d}{\varphi(d)} \sum_{\chi^*} |\psi_0(N, \chi)| \ll N + (uN^{5/6} + u^2 N^{1/2}) L + u^2 N^{-2/3}.$$

Allora, utilizzando la formula di sommazione parziale, deduciamo

$$\sum_{Q<d<z^2} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\chi^*} |\psi_0(N, \chi)| \ll \frac{N}{Q}.$$

Pertanto

$$S_5 \ll \frac{N}{Q}$$

e quindi, ricordando che $Q = L^{100}$,

$$S_3 \ll \frac{N}{L^{41}}.$$

Da tale disuguaglianza otteniamo

$$S_2 \ll \frac{N}{L^{38}}$$

da cui segue che

$$S_1 \leq 1.972\ \mathfrak{S}(N)\frac{N}{L^2}(1+O(\frac{1}{L})).$$

Per la (1.9) allora si ottiene

$$S_0 \leq 1.972\ \mathfrak{S}(N)\frac{N}{L^2}(1+O(\frac{1}{\sqrt{L}})),$$

da cui, per la (1.8), si ha la tesi.

CAPITOLO 2

L'insieme eccezionale: risultati globali

1. Risultati incondizionali

Siano
$$E = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ pari e } n \text{ non è un G-numero}\}$$
l'insieme eccezionale del problema di Goldbach e
$$E(N) = E \cap [1, N].$$

Chudakov [**Chu37**], Van der Corput [**VdC38**] ed Estermann [**Est38**] provarono che
$$|E(N)| \ll_A NL^{-A},$$
con $A > 0$ costante arbitraria.

In realtà essi provarono la stima
$$\sum_{n \le N} |R(n) - n\mathfrak{S}(n)|^2 \ll_A N^3 L^{-A},$$
ottenendo come conseguenza sia la formula asintotica attesa per $R(n)$ che stime per $|E(N)|$. La maggiorazione per $|E(N)|$ si ottiene osservando che, se $2k \in E(N)$, allora, siccome $\mathfrak{S}(2k) \gg 1$, si ha
$$|R(2k) - 2k\mathfrak{S}(2k)|^2 = (2k)^2\mathfrak{S}(2k) \gg (2k)^2.$$
Per sommazione parziale, segue che
$$|E(N)| = \sum_{n \in E(N)} 1 \ll \sum_{n=1}^{N} \left(n^{-2} |R(n) - n\mathfrak{S}(n)|^2\right) \ll_A NL^{-A}.$$

Il tipo di stima per $|E(N)|$ dipende dal livello P degli archi maggiori $\mathfrak{M}$. Chudakov, Van der Corput ed Estermann presero $P = L^A$. Si può però osservare che, definendo
$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \le P} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} I(q, a), \quad \mathfrak{m} = (0, 1) \setminus \mathfrak{M} \quad \text{e} \quad Q = \frac{N}{P} ,$$
le stime di $S(\alpha)$ menzionate nell'Introduzione forniscono essenzialmente, per $R = P$,
$$S(\alpha) \ll NP^{-1/2}L^3 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{m} . \tag{2.1}$$

E' allora chiaro che, ammesso di riuscire a trattare gli archi maggiori con un livello P, la (2.1) e la tecnica di Chudakov-Van der Corput-Estermann forniscono
$$|E(N)| \ll NP^{-\theta} , \quad \theta > 0 .$$

Il metodo di Vaughan [**Vau72**] e Montgomery-Vaughan [**MV75**] consente il trattamento degli archi maggiori con un livello del tipo $P = N^{\delta}$, $\delta > 0$. Tale metodo è basato su uno studio accurato del contributo dello zero di Siegel e sul teorema di densità di Gallagher [**Gal70**]. Notiamo che pur ottenendo una stima migliore per la cardinalità dell'insieme eccezionale, si perde la formula asintotica attesa per il numero di rappresentazioni. Questo fenomeno non è dovuto ad un'imprecisione del metodo ma rispecchia la natura del problema, come si può constatare dalla dimostrazione. In altre parole, l'esistenza di uno zero di Siegel produce un "termine principale secondario" il cui contributo viene calcolato con precisione. Il fenomeno di Deuring-Heilbronn consente di provare che tale contributo non può cancellare totalmente il "termine principale". La formula asintotica per il numero di rappresentazioni risente però della presenza di tale zero eccezionale e non è quindi più valida.

Teorema 2.1.1 (Montgomery-Vaughan). *Esiste $\delta > 0$ tale che*

$$|E(N)| \ll N^{1-\delta} .$$

Osserviamo che le costanti sono effettive. Sono stati calcolati valori per δ il cui l'ordine di grandezza è del tipo di 10^{-2}, vedi [**Che83**].

1.1. La dissezione di Farey e gli archi minori.

Sia $\delta > 0$. E' noto che esiste al più un carattere primitivo $\tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$, con $\tilde{r} \le N^{12\delta}$, ed uno zero $\tilde{\beta}$, reale e semplice, di $L(s, \tilde{\chi})$ che soddisfa

$$\frac{c_1}{\tilde{r}^{1/2}\log^2 \tilde{r}} \le 1 - \tilde{\beta} \le \frac{c_2}{(\log N^{12\delta})}$$

(si ricava dalla class-number formula e dalla regione zero-free, vedi ad es. Davenport [**Dav80**] cap. 6 e 14) dove $c_1, c_2 > 0$ sono costanti opportune. Scegliamo

$$P = N^{12\delta}$$

se $\tilde{r}$ non esiste oppure se $\tilde{r} \le N^{6\delta}$. Se invece si ha $N^{6\delta} < \tilde{r} \le N^{12\delta}$, scegliamo

$$P = N^{6\delta} .$$

In questo modo si ha che $\tilde{r} < P^{1/2}$ non appena $\tilde{r} \le P$. Questa scelta sarà utile nell'argomento conclusivo della dimostrazione. Sia inoltre

$$Q = \frac{N}{P} .$$

Definiamo come al solito gli archi maggiori

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \le P} \bigcup_{a=1}^{q}{}^{*} \mathfrak{M}(q, a)$$

e $\mathfrak{m} = (0, 1) \setminus \mathfrak{M}$ gli archi minori. Per comodità useremo la somma esponenziale

$$S(\alpha) = \sum_{n=P}^{N} \Lambda(n) e(n\alpha)$$

e, conseguentemente, la funzione

$$R(n) = \sum_{\substack{h+k=n \\ h,k\geq P}} \Lambda(h)\Lambda(k) \ .$$

Abbiamo

$$R(n) = \int_0^1 S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha = \left(\int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}}\right) S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha$$

$$= R_1(n) + R_2(n) \ . \tag{2.2}$$

Si tratta di far vedere che, a meno di un insieme eccezionale di cardinalità piccola, $R_1(n)$ è "grande" e $R_2(n)$ è "piccola". Dalle stime menzionate nell'Introduzione abbiamo che

$$S(\alpha) \ll NP^{-1/2}L^3 \ , \ \text{se} \quad \alpha \in \mathfrak{m}$$

e quindi, utilizzando la formula di Parseval e il teorema dei numeri primi,

$$\sum_{n\leq N} R_2(n)^2 = \int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^4 d\alpha \ll \left(\max_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2\right) \int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$\ll \left(\max_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2\right) NL \ll N^3 P^{-1} L^3 \ . \tag{2.3}$$

La (2.3) consente di ottenere che $R_2(n)$ è "sufficientemente piccolo" "sufficientemente spesso".

1.2. Archi maggiori: impostazione del problema.

Si può provare facilmente, vedi Davenport [**Dav80**] cap. 26, che

$$S\left(\frac{a}{q} + \eta\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\tau(\overline{\chi})W(N,\chi,\eta) + O(\log^2 qN) \tag{2.4}$$

dove

$$W(N,\chi,\eta) = \sum_{n=P}^{N} \Lambda(n)\chi(n)e(n\eta) \ .$$

Notiamo che se $\chi \pmod q$ non è primitivo, ossia $\exists\tilde{\chi} \pmod r$, $r|q$, carattere primitivo tale che χ è indotto da $\tilde{\chi}$, allora la differenza tra le quantità $W(N,\chi,\eta)$ e $W(N,\tilde{\chi},\eta)$ è trascurabile (infatti considerato un primo $p > P$ si ha $(q,p) = 1$ perchè $q \leq P$ e quindi $\chi(p) = \tilde{\chi}(p)$).

Operiamo la seguente approssimazione di $W(N,\chi,\eta)$. Poniamo

$$S(N,\chi,\eta) = \begin{cases} W(N,\chi_0,\eta) - T(\eta) & \text{se } \chi = \chi_0 \pmod q \\ W(N,\tilde{\chi}\chi_0,\eta) - T_{\tilde{\beta}}(\eta) & \text{se } \chi = \tilde{\chi}\chi_0 \pmod q \\ & \text{ovvero se } \chi \text{ è indotto da } \tilde{\chi} \\ W(N,\chi,\eta) & \text{altrimenti ,} \end{cases}$$

dove

$$T(\eta) = \sum_{n=P}^{N} e(n\eta) \quad ; \quad T_{\tilde{\beta}}(\eta) = \sum_{n=P}^{N} n^{\tilde{\beta}-1} e(n\eta) \ .$$

Abbiamo quindi

$$W(N,\chi,\eta) = \delta_\chi T(\eta) - \delta_{\tilde\chi} T_{\tilde\beta}(\eta) + S(N,\chi,\eta) \tag{2.5}$$

con

$$\delta_{\tilde\chi} = \begin{cases} 1 & \text{se } \chi \text{ è indotto da } \tilde\chi \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Dalle relazioni (2.4), (2.5) otteniamo allora

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q}+\eta\right) &= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}T(\eta) - \delta_q \frac{\tilde\chi(a)\tau(\tilde\chi\chi_0)}{\varphi(q)} T_{\tilde\beta}(\eta) \\ &+ \frac{1}{\varphi(q)}\sum_\chi \chi(a)\tau(\overline{\chi})S(N,\chi,\eta) + O(\log^2 qN) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dove

$$\delta_q = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde r | q \\ 0 & \text{se } \tilde r \nmid q. \end{cases}$$

(cioè abbiamo al più $\frac{P}{\tilde r}$ caratteri indotti da quello eccezionale).

Si vede facilmente che il contributo a $R_1(n)$ del termine $O(\log^2 qN)$ in (2.6) è trascurabile e quindi non ne terremo conto nel prosieguo.

Svolgendo i quadrati nella (2.6) abbiamo

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q}+\eta\right)^2 &= \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}T(\eta)^2 - \delta_q \frac{\tau(\tilde\chi\chi_0)^2}{\varphi(q)^2} T_{\tilde\beta}(\eta)^2 \\ &+\frac{1}{\varphi(q)^2}\sum_\chi\sum_{\chi'} \chi(a)\chi'(a)\tau(\overline{\chi})\tau(\overline{\chi}')S(N,\chi,\eta)S(N,\chi',\eta) \\ &-2\delta_q \frac{\mu(q)\overline{\chi}(a)\tau(\tilde\chi\chi_0)}{\varphi(q)^2} T(\eta)T_{\tilde\beta}(\eta) + 2\frac{\mu(q)}{\varphi(q)^2}\sum_\chi \chi(a)\tau(\overline{\chi})T(\eta)S(N,\chi,\eta) \\ &-2\delta_q \frac{\tilde\chi(a)\tau(\tilde\chi\chi_0)}{\varphi(q)^2}\sum_\chi \chi(a)\tau(\overline{\chi})T_{\tilde\beta}(\eta)S(N,\chi,\eta) \\ &= A^2+B^2+C^2-2AB+2AC-2BC \end{aligned}$$

e, conseguentemente,

$$R_1(n) = \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha$$

$$= \sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}^{*} e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{\xi_{q,a}} \left(A^2+B^2+C^2-2AB+2AC-2BC\right)e(-n\eta)d\eta\ . \tag{2.7}$$

Il termine A^2 è familiare e porta, nel modo usuale, alla serie singolare del problema; il termine B^2 si tratta in modo analogo al termine A^2, e porta al termine principale "secondario"; il termine AB viene anch'esso trattato in modo simile al termine A^2 ma, data la particolare forma della "serie singolare" che ne deriva, porta ad un termine di errore "aritmetico".

Infine, i termini C^2, AC, BC vengono ridotti, per mezzo della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e del lemma di Gallagher, ad opportune stime di densità per gli zeri delle funzioni L. Poichè tali stime sono in media sui caratteri primitivi, è necessario ridurre i caratteri coinvolti ai caratteri primitivi che li inducono. Questa procedura coinvolge alcune difficoltà di tipo aritmetico, ed i risultati relativi sono presentati in una serie di lemmi.

1.3. Archi maggiori: alcuni lemmi.

Elenchiamo senza dimostrazioni alcuni lemmi che verranno utilizzati in seguito.

Lemma 2.1.1 *Esistono costanti (piccole) $c_1, c_2 > 0$ tali che*

$$\sum_{q\le P}\sum_{\chi}{}^{*} \max_{X\le N}\max_{X<H\le N}\left(H+\frac{N}{P}\right)^{-1}\left|\sum_{n=X-H}^{X}{}^{\#}\Lambda(n)\chi(n)\right| \ll G\exp\left(-c_1\frac{L}{\log P}\right)$$

per $\exp(\sqrt{L}) \le P \le N^{c_2}$. *Il simbolo # indica che:*
i) se $q=1$ la somma è

$$\sum_{n=X-H}^{X}\Lambda(n) - \sum_{n=X-H}^{X} 1$$

ii) se si ha un carattere eccezionale $\tilde{\chi}$ la somma è

$$\sum_{n=X-H}^{X}\Lambda(n)\tilde{\chi}(n) + \sum_{n=X-H}^{X} n^{\tilde{\beta}-1}$$

ed il simbolo G denota

$$G = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{\chi} \text{ non esiste} \\ (1-\tilde{\beta})\log P & \text{se } \tilde{\chi} \text{ esiste .}\end{cases}$$

Il termine G deriva dal fenomeno di Deuring-Heilbronn.

Dimostrazione La dimostrazione segue secondo linee classiche dal teorema di densità di Gallagher [**Gal70**]. □

Per provare il risultato di Montgomery-Vaughan si potrebbe partire direttamente dal teorema di densità di Gallagher e procedere in modo diretto ottenendo un risultato equivalente a quello che si ottiene ricorrendo ad una applicazione del Lemma 2.1.1.

Seguono alcuni lemmi di carattere aritmetico, che consentono di trattare con precisione il contributo dei caratteri non primitivi, e di stimare opportune somme sui caratteri primitivi così ottenuti.

Lemma 2.1.2 *Sia $\chi \pmod q$ primitivo. Allora $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$. Se inoltre χ è reale (quadratico), si ha $\tau(\chi)^2 = \chi(-1)q$ e $\frac{q}{(4,q)}$ è privo di quadrati.*

Per la dimostrazione si veda Davenport [**Dav80**], cap. 5 e 9.

Lemma 2.1.3 *Sia* $\chi \pmod q$ *indotto da* $\chi^* \pmod r$*. Allora* $r|q$ *e*

$$\tau(\chi) = \mu\left(\frac{q}{r}\right)\chi^*\left(\frac{q}{r}\right)\tau(\chi^*).$$

Per la dimostrazione si veda Davenport [**Dav80**], cap. 5.

Sia ora $\chi \pmod q$ e

$$c_\chi(n) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a) e\left(\frac{na}{q}\right) .$$

Lemma 2.1.4 *Sotto le ipotesi del Lemma 2.1.3, ed inoltre* $(n,q)=1$*, abbiamo*

$$c_\chi(n) = \overline{\chi}^*(n)\mu\left(\frac{q}{r}\right)\chi^*\left(\frac{q}{r}\right)\tau(\chi^*) .$$

Dim.

$$\chi^*(n)c_\chi(n) = \chi(n)c_\chi(n) = c_\chi(1) = \tau(\chi) = \mu\left(\frac{q}{r}\right)\chi^*\left(\frac{q}{r}\right)\tau(\chi^*) . \quad \square$$

Lemma 2.1.5 *Sia* $\chi \pmod q$ *indotto da* $\chi^* \pmod r$ *e poniamo* $q_1 = \dfrac{q}{(q,|n|)}$*. Se* $r \nmid q$*, allora* $c_\chi(n) = 0$*. Se* $r|q$*, allora*

$$c_\chi(n) = \overline{\chi}^*\left(\frac{n}{(q,|n|)}\right)\frac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)}\mu\left(\frac{q_1}{r}\right)\chi^*\left(\frac{q_1}{r}\right)\tau(\chi^*) .$$

Per la dimostrazione si veda Montgomery-Vaughan [**MV75**], pag. 359-360.

Lemma 2.1.6 *Siano* $\chi_i \pmod{r_i}$ *primitivi, con* $i = 1,2$*. Se* $n \neq 0$ *abbiamo:*

$$\sum_{\substack{q \equiv 0 \pmod{r_1} \\ q \equiv 0 \pmod{r_2}}} \frac{1}{\varphi(q)^2} |c_{\chi_1\chi_2\chi_0}(n)\tau(\overline{\chi_1}\chi_0)\tau(\overline{\chi_2}\chi_0)| \ll \frac{|n|}{\varphi(|n|)}$$

dove χ_0 *è il carattere principale* $\pmod q$*.*

Per la dimostrazione si veda Montgomery-Vaughan [**MV75**], pag. 360-361.

1.4. Archi maggiori: le stime.

(i) Il contributo di A^2.

Utilizzando la stima

$$T(\eta) \ll \min(N, \frac{1}{||\eta||})$$

e la periodicità di T si ha che

$$\int_{\xi_{q,a}} T^2(\eta)d\eta = \int_0^1 T^2(\eta)d\eta + O\left(\int_{\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{2}} T^2(\eta)d\eta\right)$$
$$= n + O(qQ).$$

Pertanto otteniamo

$$\sum_{q\le P}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q} e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{\xi_{q,a}} A^2 e(-n\eta)d\eta = \sum_{q\le P}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}c_q(-n)(n+O(qQ)).$$

Sfruttando la relazione (vedi [**Dav80**] cap. 26 pag. 148)

$$c_q(-n) = \frac{\mu(q/(n,q))\varphi(q)}{\varphi(q/(n,q))}$$

il termine d'errore contribuisce per al più

$$\ll Q\sum_{q\le P}\frac{q}{\varphi(q)\varphi(q/(n,q))} \ll Q\sum_{d|n}\frac{d}{\varphi(d)}\sum_{r\le P}\frac{r}{\varphi^2(r)}$$
$$\ll Q\frac{n}{\varphi(n)}d(n)\log P \ll \frac{N^{1+\delta}}{P}.$$

Per quanto riguarda il termine principale si estende la sommatoria a tutti i $q \ge 1$. Ciò comporta un errore

$$\ll n\sum_{q>P}\frac{1}{\varphi(q)\varphi(q/(n,q))} \ll n\sum_{d|n}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{r>P/d}\frac{1}{\varphi^2(r)}$$
$$\ll \frac{n^2}{P\varphi(n)}d(n) \ll \frac{N^{1+\delta}}{P},$$

per $n \le N$. Abbiamo allora

$$\sum_{q\le P}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q} e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{\xi_{q,a}} A^2 e(-n\eta)d\eta = n\mathfrak{S}(n) + O\left(\frac{N^{1+\delta}}{P}\right) \tag{2.8}$$

dove $\mathfrak{S}(n)$ è la serie singolare del problema di Goldbach definita da

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}c_q(-n) = 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-2)^2}\right)\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right).$$

(ii) Il contributo di B^2.

Ponendo

$$\tilde{I}(n) = \int_0^1 T_{\tilde{\beta}}(\eta)^2 e(-n\eta)d\eta$$

abbiamo che (per sommazione parziale e $T_{\tilde\beta}(\eta) \ll \frac{1}{\|\eta\|}$)

$$\int\limits_{\xi_{q,a}} T_{\tilde\beta}(\eta)^2 e(-n\eta)d\eta = \tilde I(n) + O(qQ).$$

Ragionando come sopra, il contributo di B^2 è

$$\sum_{\substack{q\le P \\ q\equiv 0 \pmod{\tilde r}}} \tau(\tilde\chi\chi_0)^2 c_q(-n)\varphi(q)^{-2}\left(\tilde I(n) + O(qQ)\right)$$

$$= \tilde I(n) \sum_{\substack{q\le P \\ q\equiv 0 \pmod{\tilde r}}} \tau(\tilde\chi\chi_0)^2 c_q(-n)\varphi(q)^{-2} + O\left(\frac{N^{1+\delta}}{P}(n,\tilde r)\right) . \tag{2.9}$$

Prolungando la somma su q fino all'infinito otteniamo

$$\sum_{q\equiv 0 \pmod{\tilde r}} \tau(\tilde\chi\chi_0)^2 c_q(-n)\varphi(q)^{-2} = \tilde{\mathfrak{S}}(n) + O\left(\frac{N^{\delta}}{P}(n,\tilde r)\right) \tag{2.10}$$

dove, per il Lemma 2.1.2 e l'espressione esplicita di $c_q(-n)$, abbiamo

$$\tilde{\mathfrak{S}}(n) = \tilde\chi(-1)\mu\left(\frac{\tilde r}{(\tilde r,n)}\right)\tilde r\varphi(\tilde r)^{-1}\varphi\left(\frac{\tilde r}{(\tilde r,n)}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\nmid\tilde r \\ p\nmid n}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid\tilde r \\ p\mid n}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$

$$\ll \frac{n}{\varphi(n)}\frac{\tilde r}{\varphi(\tilde r)^2} . \tag{2.11}$$

Dalla (2.9) e dalla (2.10), usando $\tilde I(n) \ll N$, otteniamo

$$\sum_{q\le P}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q} e\left(-\frac{na}{q}\right)\int\limits_{\xi_{q,a}} B^2 e(-n\eta)d\eta = \delta_{\tilde\beta}\tilde I(n)\tilde{\mathfrak{S}}(n) + O\left(\delta_{\tilde\beta}\frac{N^{1+\delta}}{P}(n,\tilde r)\right) \tag{2.12}$$

dove

$$\delta_{\tilde\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \delta_{\tilde\beta} \text{ esiste} \\ 0 & \text{altrimenti .}\end{cases}$$

(iii) Il contributo di AB.

Ponendo

$$\tilde J(n) = \int_0^1 T(\eta)T_{\tilde\beta}(\eta)e(-n\eta)d\eta$$

otteniamo come al solito che il contributo di AB è

$$2 \sum_{\substack{q\le P \\ q\equiv 0 \pmod{\tilde r}}} \mu(q)\tau(\tilde\chi\chi_0)c_{\tilde\chi\chi_0}(-n)\varphi(q)^{-2}(\tilde J(n) + O(qQ)). \tag{2.13}$$

Analogamente al caso (ii), il contributo del termine di errore e quello delle "code" della "serie singolare" sono entrambi

$$O\left(\frac{N^{1+\delta}}{P}(n,\tilde{r})\right) \ . \tag{2.14}$$

La serie singolare è invece

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 \pmod{\tilde{r}}}}^{+\infty} \mu(q)\tau(\tilde{\chi}\chi_0)c_{\tilde{\chi}\chi_0}(-n)\varphi(q)^{-2}$$

$$= \mu(\tilde{r})\tilde{\chi}(n)\tilde{r}\varphi(\tilde{r})^{-2}\prod_{\substack{p\nmid\tilde{r} \\ p\nmid n}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid\tilde{r} \\ p\mid n}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$

$$\ll \tilde{\chi}(n)^2\tilde{r}\varphi(\tilde{r})^{-2}\frac{n}{\varphi(n)} \ . \tag{2.15}$$

Pertanto da (2.13)-(2.15) abbiamo

$$2\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}^{*} e\left(-\frac{na}{q}\right)\int\limits_{\xi_{q,a}} ABe(-n\eta)d\eta$$

$$\ll \delta_{\tilde{\beta}}\frac{N^{1+\delta}}{P}(n,\tilde{r}) + \delta_{\tilde{\beta}}\tilde{\chi}(n)^2\tilde{r}\varphi(\tilde{r})^{-2}\frac{n}{\varphi(n)}N \ . \tag{2.16}$$

(iv) Il contributo di C^2, AC e BC

Poniamo

$$S(\chi) = \left(\int\limits_{-\frac{1}{rQ}}^{\frac{1}{rQ}} |S(N,\chi,\eta)|^2 d\eta\right)^{1/2}$$

dove $\chi \pmod{q}$ è indotto da $\chi^* \pmod{r}$. Notiamo che, a meno di errori trascurabili, si ha

$$S(\chi) = S(\chi^*).$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo che il contributo di C^2, AC, e BC è

$$\ll N^{1/2}\sum_{q\le P}\mu(q)^2\varphi(q)^{-2}\sum_{\chi}|c_\chi(-n)\tau(\overline{\chi})|S(\chi^*)$$

$$+\sum_{q\le P}\varphi(q)^{-2}\sum_{\chi,\chi'}|c_{\chi\chi'}(-n)\tau(\overline{\chi})\tau(\overline{\chi'})|S(\chi^*)S(\chi'^*)$$

$$+ N^{1/2}\sum_{\substack{q\le P \\ q\equiv 0 \pmod{\tilde{r}}}}\varphi(q)^{-2}\sum_{\chi}|c_{\chi\tilde{\chi}}(-n)\tau(\overline{\chi})\tau(\tilde{\chi}\chi_0)|S(\chi^*) \ . \tag{2.17}$$

Raggruppando i termini che provengono da χ^* (e da χ'^*) fissati ed usando il Lemma 2.1.6 otteniamo che la (2.17) è

$$\ll \frac{n}{\varphi(n)}(SN^{1/2}+S^2) \tag{2.18}$$

dove

$$S=\sum_{q\le P}\sum_{\chi}{}^{*} S(\chi).$$

A questo punto per stimare S usiamo il Lemma 2.1.1 e il Lemma di Gallagher. Otteniamo

$$S(\chi)\ll\left(\int_0^{2N}|\frac{1}{qQ}\sum^{\#}_{\substack{P<n\le N\\ x-\frac{qQ}{2}<n\le x}}\Lambda(n)\chi(n)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\ll N^{1/2}\max_{x\le 2N}\max_{x<H<N}(H+\frac{N}{P})^{-1}|\sum_{n=x-H}^{x}{}^{\#}\Lambda(n)\chi(n)|$$

e quindi per Lemma 2.1.1 si ha

$$S\ll GN^{1/2}\exp(-c\frac{L}{\log P}). \tag{2.19}$$

Dalle (2.18) e (2.19) otteniamo infine che

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}^{*} e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{\xi_{q,a}}(C^2+2AC-2BC)e(-n\eta)d\eta$$

$$\ll \frac{n}{\varphi(n)}NG\exp(-c\delta^{-1}). \tag{2.20}$$

Dalle (2.7), (2.8), (2.12), (2.16) e (2.20) otteniamo

$$R_1(n)=n\mathfrak{S}(n)+\delta_{\tilde\beta}\tilde I(n)\tilde{\mathfrak{S}}(n)+O\left(\delta_{\tilde\beta}\frac{N^{1+\delta}}{P}(n,\tilde r)\right)$$

$$+O\left(\delta_{\tilde\beta}\frac{\tilde\chi(n)^2\tilde r nN}{\varphi(\tilde r)^2\varphi(n)}\right)+O\left(\frac{n}{\varphi(n)}NG\exp(-c\delta^{-1})\right). \tag{2.21}$$

Notiamo anche che

$$\tilde I(n)\le n^{\tilde\beta}$$

e che

$$n-n^{\tilde\beta}>cnG\ ,$$

se $\frac{N}{2}<n\le N$.

1.5. Conclusione della dimostrazione.

Dalla (2.3) otteniamo che

$$|R_2(n)| > NP^{-1/3}$$

per al più $O(NP^{-1/3}L^3)$ valori di n. Dobbiamo quindi dimostrare che

$$R_1(n) > NP^{-1/3} \tag{2.22}$$

per gli $n \in [\frac{N}{2}, N]$, con al più $O(NP^{-1/3}L^c)$ eccezioni. Poichè

$$\mathfrak{S}(n) \gg \frac{n}{\varphi(n)} \ ,$$

se non esiste $\tilde{\beta}$ la (2.21) fornisce la (2.22) senza eccezioni, in quanto

$$R_1(n) = n\mathfrak{S}(n) + O\left(\frac{n}{\varphi(n)} NG\exp(-c\delta^{-1})\right) \gg \frac{n}{\varphi(n)} N \gg N$$

nell'intervallo $n \in [\frac{N}{2}, N]$.

Supponiamo quindi che $\tilde{\beta}$ esista. Se $(n, \tilde{r}) = 1$ allora

$$\tilde{\mathfrak{S}}(r) = o(1)$$

poichè $\tilde{r} \gg \log P$, e nuovamente abbiamo che

$$R_1(n) \gg N$$

nell'intervallo $n \in [\frac{N}{2}, N]$. Se $(n, \tilde{r}) > 1$ allora il termine contenente $\tilde{\chi}(n)$ in (2.21) si annulla. Ricordando che $\tilde{r} < P^{1/2}$, e quindi $(n, \tilde{r}) < P^{1/2}$, la (2.21) diviene

$$R_1(n) = n\mathfrak{S}(n) + \tilde{I}(n)\tilde{\mathfrak{S}}(n) + O\left(\frac{N}{P^{1/3}}\right) + O\left(\frac{n}{\varphi(n)} NG\exp(-c\delta^{-1})\right). \tag{2.23}$$

Notando che

$$|\tilde{\mathfrak{S}}(n)| \leq \mathfrak{S}(n)$$

abbiamo

$$n\mathfrak{S}(n) + \tilde{I}(n)\tilde{\mathfrak{S}}(n) \geq c\mathfrak{S}(n)nG \gg c\frac{n}{\varphi(n)} NG$$

e quindi l'ultimo termine di errore nelle (2.23) è dominato se δ è sufficientemente piccolo. Quindi

$$R_1(n) \geq c\frac{n}{\varphi(n)} N(1-\tilde{\beta})\log P - c\frac{N}{P^{1/3}}.$$

Ma poichè $\tilde{r} < P^{1/2}$ abbiamo $1 - \tilde{\beta} \gg P^{-1/4}(\log P)^{-2}$, e quindi

$$R_1(n) \gg NP^{-1/4}(\log P)^{-1}$$

e la (2.22) segue, senza eccezioni. □

2. Risultati condizionali

Per quanto riguarda i risultati condizionali, nel 1923 Hardy e Littlewood, nei loro lavori [**HL23a**] e [**HL23b**], utilizzarono il metodo del cerchio, da loro inventato, per provare il seguente risultato :

Teorema 2.2.1 (Hardy-Littlewood). *Assumiamo GRH. Allora* $\forall \varepsilon > 0$

$$|E(N)| \ll N^{1/2+\varepsilon}.$$

Nel seguito utilizzeremo le notazioni moderne, introdotte da Vinogradov [**Vin37a, Vin37b**] anziché quelle originariamente utilizzate da Hardy e Littlewood. In realtà i cambiamenti sono di piccola entità e risiedono essenzialmente nell'uso della funzione

$$S(\alpha) = \sum_{p \le N} (\log p) e(p\alpha) \ , e(x) = e^{2\pi i u}$$

anziché di

$$\sum_{p} (\log p) z^p \ , |z| < 1.$$

Il metodo di Hardy e Littlewood è stato recentemente raffinato da Goldston (vedi [**Gol92b**]) fino a provare

$$|E(N)| \ll N^{1/2} L^4 \ .$$

Successivamente Goldston (comunicazione scritta) ha ottenuto, ottimizzando ulteriormente la tecnica, che

$$|E(N)| \ll N^{1/2} L^3 \ .$$

Tale risultato è stato ottenuto anche da Kaczorowski-Perelli-Pintz [**KPP93**], vedi cap. 3 di questa tesi, come conseguenza di un risultato sull'insieme eccezionale in intervalli corti.

Esaminiamo adesso la tecnica di Hardy e Littlewood.

Sia

$$v(n) = v(n, N) = \sum_{\substack{1 \le h,k \le N \\ h+k=n}} 1$$

cosicché $v(n) = \min(n-1, 2N-n+1)$ per $1 \le n \le N$. Posto inoltre $T(\alpha) = \sum_{1 \le n \le N} e(n\alpha)$ si ha allora

$$T(\alpha)^2 = \sum_{1 \le n \le 2N} v(n) e(n\alpha).$$

Posto ancora

$$V(\alpha) = \sum_{1 \le n \le 2N} v(n) \mathfrak{S}(n) e(n\alpha)$$

abbiamo che

$$\sum_{1 \le n \le 2N} (R(n) - v(n)\mathfrak{S}(n))^2 = \int_0^1 \left| S(\alpha)^2 - V(\alpha) \right|^2 d\alpha$$

$$= \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int\limits_{\xi_{q,a}} \left| S(\frac{a}{q}+\eta)^2 - V(\frac{a}{q}+\eta) \right|^2 d\eta.$$

Approssimando $S(\frac{a}{q}+\eta)$ con $\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}T(\eta)$, e utilizzando la disuguaglianza $|a+b|^2 \le 2\,(|a|^2+|b|^2)$, si ottiene che

$$\sum_{1\le n\le 2N} (R(n)-v(n)\mathfrak{S}(n))^2 \ll \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int\limits_{\xi_{q,a}} \left| S(\frac{a}{q}+\eta)^2 - \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}T(\eta)^2 \right|^2 d\eta$$

$$+ \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int\limits_{\xi_{q,a}} \left| V(\frac{a}{q}+\eta) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}T(\eta)^2 \right|^2 d\eta = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{2.24}$$

Stima di Σ_1

Per stimare Σ_1 si utilizza il seguente

Lemma 2.2.1. *Assumiamo GRH. Detto $R(\eta,q,a) = S(\frac{a}{q}+\eta) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}T(\eta)$ si ha*

$$R(\eta,q,a) \ll \sqrt{Nq}\log^2(qN) + \sqrt{q\eta}N\log(qN).$$

Tale lemma, essenzialmente noto a Hardy-Littlewood, vedi [**HL23a**] pag. 23, è stato provato da Baker-Harman ([**BH82**], Lemma 12), ma in questa forma è dovuto a Goldston ([**Gol92b**], Lemma 5).

Poichè $|a^2-b^2| = 2a(a-b)-(a-b)^2$ e $\xi_{q,a} \subset (-\frac{1}{qQ},\frac{1}{qQ})$, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo

$$\Sigma_1 \ll (\max_{q,a,\eta} |R(\eta,q,a)|)^2 \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |R(\eta,q,a)|^2 d\eta,$$

dove il max è fatto sulle tre variabili q,a,η sottoposte alle seguenti condizioni

$$1 \le q \le Q, \quad (a,q)=1, \quad |\eta| \le \frac{1}{qQ}.$$

Siccome $Q \le N$ segue che

$$\max_{q,a,\eta} |R(\eta,q,a)| \ll \sqrt{NQ}L^2 + \frac{N}{\sqrt{Q}}L,$$

e quindi

$$\Sigma_1 \ll (\sqrt{NQ}L^2 + \frac{N}{\sqrt{Q}}L)^2 \sum_{1\le q\le Q} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |R(\eta,q,a)|^2 d\eta.$$

Con facili calcoli si può provare (vedi [**Gol92b**], Lemma 6) che

$$\sum_{1\le q\le Q}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}|R(\eta,q,a)|^2 d\eta \ll NL$$

e quindi si ha

$$\Sigma_1 \ll QN^2L^5 + \frac{N^3L^3}{Q}.$$

Scegliendo $Q = \frac{N^{1/2}}{L}$ si ottiene allora

$$\Sigma_1 \ll N^{5/2}L^4. \quad \square \tag{2.25}$$

Hardy e Littlewood provarono in realtà

$$\Sigma_1 \ll N^{5/2}L^A$$

con $A > 0$ costante arbitraria.

Stima di Σ_2

Ricordando la definizione di $V(\alpha)$, si ha che

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \sum_{n\le 2N}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}c_r(-n)\right)v(n)e(n(\frac{a}{q}+\eta)) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sum_{n\le 2N}v(n)e(n(\frac{a}{q}+\eta))\sum_{b=1}^{r}{}^{*}e(-\frac{bn}{r}) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sum_{b=1}^{r}{}^{*}T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2 \\ &= \left(\sum_{r\le y}+\sum_{r>y}\right)\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sum_{b=1}^{r}{}^{*}T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2 \\ &= V_1(\alpha)+V_2(\alpha), \end{aligned} \tag{2.26}$$

dove $y \le Q$ è un parametro da scegliere in seguito. Allora, siccome $|a+b|^2 \le 2(|a|^2+|b|^2)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \ll &\sum_{1\le q\le Q}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{\xi_{q,a}}|V_1(\frac{a}{q}+\eta)-\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}T(\eta)^2|^2 d\eta \\ &+\sum_{1\le q\le Q}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{\xi_{q,a}}|V_2(\frac{a}{q}+\eta)|^2 d\eta \\ = &\sum_{1\le q\le y}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{\xi_{q,a}}|\sum_{r\le y}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r}{}^{*}T^2(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)|^2 d\eta \\ &+\sum_{y\le q\le Q}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{\xi_{q,a}}|\sum_{r\le y}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r}{}^{*}T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2-\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}T(\eta)^2|^2 d\eta \\ &+\int_0^1|\sum_{n\le N}v(n)\mathfrak{S}_y(n)e(n\alpha)|^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \ll &\sum_{1\le q\le Q}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{\xi_{q,a}}|\sum_{r\le y}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r}{}^{*}T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2|^2 d\eta \\ &+\sum_{y\le q\le Q}\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^4}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{\xi_{q,a}}|T(\eta)|^4 d\eta+\sum_{n\le 2N}v(n)^2\mathfrak{S}_y(n)^2 \\ &= U_1+U_2+U_3. \end{aligned}$$

Stima di U_1

Poichè nella somma

$$\sum_{r\le y}\frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)^2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r} T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2$$

ci sono al più y^2 addendi, ricordando che $(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2 \le k\sum_{i=1}^{k} a_i^2$, otteniamo

$$U_1 \ll y^2 \sum_{1\le q\le Q}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q}\int_{\xi_{q,a}}\sum_{r\le y}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r} |\frac{1}{\varphi(r)^2}T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2|^2.$$

Utilizzando il fatto

$$T(\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta)^2 \ll \frac{1}{|\frac{a}{q}-\frac{b}{r}+\eta|^2} < \frac{1}{|\frac{a}{q}-\frac{b}{r}|^2} = \frac{(qr)^2}{(ar-bq)^2}$$

e ricordando che $\varphi(u) \gg \frac{u}{(\log u)^A}$ (vedi [**HW**]) abbiamo allora

$$U_1 \ll Q^3y^2 \sum_{1\le q\le Q}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q}\sum_{r\le y}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r} \frac{(\log r)^A}{(ar-bq)^4}.$$

Segue che

$$\sum_{1\le q\le Q}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q}\sum_{r\le y}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r} \frac{1}{q(ar-bq)^4} \ll \sum_{r\le y}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r}\ \sum_{1\le q\le Q}\frac{1}{q}\sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q}\frac{1}{(ar-bq)^4}$$

$$\ll \sum_{r\le y}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r}\frac{1}{r^4}\sum_{1\le q\le Q}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{\frac{1}{r^4}}+\frac{1}{(1+\frac{1}{r})^4}+\dots\right)$$

$$\ll \sum_{r\le y}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b=1\\ \frac{b}{r}\ne\frac{a}{q}}}^{r}(\log Q)^A.$$

Infine abbiamo

$$U_1 \ll Q^3y^2L^A. \tag{2.27}$$

Stima di U_2

Siccome

$$\int_{\xi_{q,a}} |T(\eta)|^4 d\eta \ll N^3 + O((qQ)^3)$$

otteniamo

$$U_2 \ll \sum_{y\le q\le Q} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^4} \sum_{a=1}^{q}{}^{*} (N^3 + O((qQ)^3)) \ll (N^3 + O(Q^6)) \sum_{y\le q\le Q} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^3}$$
$$\ll \frac{(N^3 + O(Q^6))(\log Q)^A}{y^2}. \tag{2.28}$$

Stima di U_3

Nel seguito utilizziamo i seguenti lemmi:

Lemma 2.2.2. *Sia $q = q_1 q_2$, $(q_2, n) = 1$. Allora*

$$\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} c_q(-n)\right| \ll \frac{(\log q)^A}{q_1 q_2^2}.$$

Dim.
Prendendo q privo di quadrati ($q = \prod_{p|q} p$) si ha che $(n, q) = (n, q_1)$ e che

$$c_q(-n) = \frac{\mu(\frac{q}{(q_1,n)})\varphi(q)}{\varphi(\frac{q}{(q_1,n)})} = \frac{\prod_{p|q}(p-1)}{\prod_{p|q_2}(p-1)} = \prod_{p|q_1}(p-1) < \prod_{p|q_1} p = q_1.$$

Otteniamo allora

$$\left|\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-n)\right| = \frac{|c_q(-n)|}{\varphi(q)^2} \ll \frac{q_1(\log q)^A}{q^2}$$

da cui la tesi. □

Lemma 2.2.3. *Sia $n > 1$, $y > 1$. Allora*

$$|\mathfrak{S}_y(n)| = \left|\sum_{y<q} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-n)\right| \ll \frac{d(n)(\log y)^A}{y} (\log n)^A.$$

Dim.
Per il Lemma 2.2.2 si ha

$$|\mathfrak{S}_y(n)| = \left|\sum_{y<q} \frac{(\log q)^A}{q_1 q_2^2}\right|.$$

Sia ora $n = \prod p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \ge 1$ e sia $\delta = \prod p_j$ un divisore di n privo di quadrati. Posso considerare quindi il caso seguente

$$y < q,\ y \text{ privo di quadrati },\ q = \delta q_2\ ,\ (q_2, n) = 1$$

con δ fissato e q_2 variabile.
Allora

$$\sum_{y<\delta q_2} \frac{(\log \delta q_2)^A}{\delta q_2^2} \ll \frac{(\log n)^A}{\delta} \sum_{\frac{y}{\delta}<q_2} \frac{(\log q_2)^A}{q_2^2}$$
$$\ll \frac{(\log n)^A}{\delta} \frac{\delta}{y} (\log \frac{y}{\delta})^A \ll \frac{(\log n)^A}{y} (\log y)^A$$

e quindi

$$\sum_{y<q} \frac{(\log q)^A}{q_1 q_2^2} = \sum_{\delta|n} \sum_{y<\delta q_2} \frac{(\log \delta q_2)^A}{\delta q_2^2} \ll \frac{d(n)(\log y)^A}{y} (\log n)^A. \quad \square$$

Possiamo adesso stimare U_3.

Per Lemma 2.2.2 abbiamo

$$U_3 \ll \sum_{n \le 2N} \frac{v(n)^2 d(n)^2 (\log y)^A}{y^2} (\log n)^A \ll \frac{(\log y)^A}{y^2} \sum_{n \le 2N} v(n)^2 d(n)^2 (\log n)^A.$$

Dal fatto che $\sum_{n \le 2N} d(n)^2 \ll N L^A$ e per sommazione parziale deduciamo

$$U_3 = \sum_{n \le 2N} v(n)^2 \mathfrak{S}_y(n) \ll \frac{N^3 L^A}{y^2}. \tag{2.29}$$

Allora, ritornando alla stima di Σ_2, otteniamo da (2.27), (2.28) e (2.29) che

$$\Sigma_2 \ll \frac{N^3 L^A}{y^2} + \frac{(N^3 + Q^6)(\log Q)^A}{y^2} + Q^3 y^4 (\log Q)^A.$$

Ponendo $Q = \frac{N^{1/2}}{L}$ e $y = N^{1/4}$ segue che

$$\Sigma_2 \ll N^{5/2} L^A. \tag{2.30}$$

Conclusione del teorema

Per le stime (2.25) e (2.30) si ha

$$\sum_{1 \le n \le 2N} (R(n) - v(n)\mathfrak{S}(n))^2 \ll N^{5/2} L^A \ll N^{5/2+\varepsilon}.$$

Poichè $\sum_{n \le N} \mathfrak{S}^2(n) \asymp N$ (vedi [**Gol90**]), si ha, siccome $v(n) = n - 1$ per $1 \le n \le N$, che

$$\sum_{1 \le n \le N} (R(n) - n\mathfrak{S}(n))^2 \ll N^{5/2+\varepsilon}.$$

Allora per $n \in E(N)$ si ha

$$(R(n) - n\mathfrak{S}(n))^2 = n^2 \mathfrak{S}^2(n) \gg n^2$$

(perchè $\mathfrak{S}^2(n) \gg 1$ per n pari) e quindi sommando per parti si ottiene

$$|E(N)| = \sum_{n \in E(N)} 1 \ll \sum_{n=1}^{N} \left(n^{-2} |R(n) - n\mathfrak{S}(n)|^2 \right) \ll N^{1/2+\varepsilon}. \quad \Lambda$$

Osservazione.

Il risultato di Goldston citato precedentemente segue da una più accurata stima dei termini non diagonali in U_1. La dimostrazione non è difficile, ma è un poco lunga e quindi la omettiamo rimandando il lettore interessato a [**Gol92b**], pag. 137-149.

CAPITOLO 3

L'insieme eccezionale: risultati locali

1. Risultati incondizionali

Nel 1973 Ramachandra [**Ram73**] provò che quasi tutti i numeri pari in un intervallo della forma $[N, N+H]$, con $N^{3/5+\varepsilon} \leq H \leq N$, sono numeri di Goldbach. Nel 1989 Wolke [**Wol89**] provò un risultato analogo per i primi 2k-gemelli con $2k \leq N^{5/8}$.

Tali risultati sono stati migliorati da Perelli-Pintz nei lavori [**PP92**], del 1992, e [**PP93**], del 1993, ottenendo la validità della formula asintotica attesa per il numero di rappresentazioni dei G-numeri in ogni intervallo del tipo $[N, N+H]$, con $N^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq N$. Come conseguenza di tale risultato si ottiene che quasi tutti i numeri pari in un intervallo della forma $[N, N+H]$, con $N^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq N$, sono numeri di Goldbach.

Inoltre, se non si richiede la formula asintotica, la tecnica di Perelli e Pintz è in grado di provare che quasi tutti i numeri pari in un intervallo della forma $[N, N+H]$, con $N^{7/36+\varepsilon} \leq H \leq N$, sono numeri di Goldbach.

La tecnica di Perelli e Pintz, a differenza di quelle precedenti, riduce il problema alla stima dell'integrale della somma esponenziale sui primi su un singolo arco minore di una opportuna dissezione di Farey dell'intervallo $(0, 1)$.

Inoltre va ricordato che Mikawa [**Mik92**], sempre nel 1992, è riuscito a provare che quasi tutti i numeri pari in un intervallo della forma $[N, N+H]$, con $N^{7/48+\varepsilon} \leq H \leq N$, sono numeri di Goldbach. Il metodo di Mikawa non consente di ottenere la formula asintotica per il numero di rappresentazioni in quanto si basa su una combinazione di metodi analitici e di crivello.

1.1. I risultati.

Teorema 3.1.1 (Perelli-Pintz)
Siano $\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $A > 0$ *costanti arbitrarie sia e* $N^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq N$.
Allora

$$\sum_{N \leq 2n \leq N+H} |R(2n) - 2n\mathfrak{S}(2n)|^2 \ll_{\varepsilon, A} HN^2L^{-A}.$$

La costante implicita nel simbolo $\ll$ è ineffettiva perchè nella dimostrazione del Teorema 3.1.1 si usa il teorema di Siegel.

Analogamente a quanto visto nel capitolo 2, dal teorema precedente seguono

Corollario 3.1.1 *Siano* $A, B > 0$ *due costanti arbitrarie e sia* $N^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq N$. *Allora per tutti i* $2n \in [N, N+H]$, *con al più* $O\left(HL^{-B}\right)$ *eccezioni, si ha*

$$R(2n) = 2n\mathfrak{S}(2n) + O\left(NL^{-A}\right) \;,$$

Corollario 3.1.2 *Quasi tutti gli interi pari in* $[N, N+H]$, *con* $N^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq N$, *sono G-numeri.*

Un risultato più forte rispetto al Corollario 3.1.2 è il seguente

Teorema 3.1.2 (Perelli-Pintz) *Siano* $\varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right)$, $A > 0$ *costanti arbitrarie e* $N^{7/36+\varepsilon} \leq H \leq N$. *Allora tutti i numeri pari in* $[N, N+H]$, *con al più* $O_{\varepsilon,A}\left(HL^{-A}\right)$ *eccezioni, sono G-numeri.*

Anche per il Teorema 3.1.2 la costante implicita nel simbolo O è ineffettiva. Il risultato del Teorema 3.1.2 è di tipo diverso rispetto a quello del Corollario 3.1.2 perchè per quest'ultimo si ha in realtà la formula asintotica per $R(n)$ (Corollario 3.1.1), mentre il Teorema 3.1.2 non fornisce tale formula. E' comunque possibile ottenere una formula asintotica per il numero di rappresentazioni di n come somma di due primi ristretti ad opportuni intervalli.

Va osservato inoltre che N^{ε} può essere sostituito con L^c utilizzando il teorema di densità di Ramachandra (vedi [**Ram73**]) anzichè quello di Huxley (vedi [**Hux75**]).

Procediamo ad illustrare lo schema della dimostrazione.

1.2. Notazioni.

Siano $N > N_0(A, \varepsilon)$, $B = \frac{3}{\varepsilon}(2A+25)$, $Q = \sqrt{H}/2$,

$$R^*(2n) = R^*(2n, N, Y) = \sum_{\substack{h+k=2n \\ N-Y<h\leq N \\ k\leq Y}} \Lambda(h)\Lambda(k),$$

$$M^*(2n) = M^*(2n, N, Y) = \sum_{\substack{h+k=2n \\ N-Y<h\leq N \\ k\leq Y}} 1,$$

$$S_1(\alpha) = \sum_{N-Y<n\leq N} \Lambda(n)e(n\alpha), \quad S_2(\alpha) = \sum_{n\leq Y} \Lambda(n)e(n\alpha), \quad e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha},$$

$$I_{q,a} = \text{ arco di Farey centrato in } \frac{a}{q},$$

$$I'_{q,a} = \left\{\frac{a}{q} + \eta,\, \eta \in \xi'_q\right\} \quad \text{con } \xi'_q \subset \left(-\frac{L^{2B}}{qY}, \frac{L^{2B}}{qY}\right),$$

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q\leq L^{2B}} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} I'_{q,a} \text{ e } \mathfrak{m} = [1/Q, 1+1/Q] \setminus \mathfrak{M}.$$

Inoltre siano

$$T_1(\eta) = \sum_{N-Y<n\leq N} e(n\eta), \quad T_2(\alpha) = \sum_{n\leq Y} e(n\eta),$$

$$R_i(\eta, q, a) = S_i\left(\frac{a}{q} + \eta\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} T_i(\eta), \quad i = 1, 2$$

$$W_1(\chi, \eta) = \sum_{N-Y<n\leq N} \Lambda(n)\chi(n)e(n\eta) - \delta_\chi T_1(\eta),$$

$$W_2(\chi,\eta)=\sum_{n\le Y}\Lambda(n)\chi(n)e(n\eta)-\delta_\chi T_2(\eta),\ \text{con}\ \delta_\chi=\begin{cases}1 & \text{se}\ \chi=\chi_0\\ 0 & \text{se}\ \chi\neq\chi_0\end{cases}.$$

1.3. Schema del metodo.

Si ha

$$\sum_{N<2n\le N+H}|R^*(2N)-M^*(2n)\mathfrak{S}(2n)|^2=$$

$$\sum_{N<2n\le N+H}\left|\int_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)e(-2n\alpha)\,d\alpha-M^*(2n)\mathfrak{S}(2n)\right|^2$$

$$\ll\sum_{N<2n\le N+H}\left|\int_{\mathfrak{m}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e(-2n\alpha)\,d\alpha\right|^2+$$

$$\sum_{N<2n\le N+H}\left|\int_{\mathfrak{M}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e(-2n\alpha)\,d\alpha-M^*(2n)\mathfrak{S}(2n)\right|^2=\sum_{\mathfrak{m}}+\sum_{\mathfrak{M}}. \tag{3.1}$$

Se si pone $Y=N$ e $N<2n\le N+H$ allora $R^*(2n)=R(2n)+O(HL)$ e $M^*(2n)=2n+O(H)$. Quindi, siccome $\mathfrak{S}(2n)\ll L$, abbiamo

$$\sum_{N<2n\le N+H}|R(2N)-2n\mathfrak{S}(2n)|^2\ll\sum_{N<2n\le N+H}|R^*(2N)-M^*(2n)\mathfrak{S}(2n)|^2$$

$$+O(H^3L^2). \tag{3.2}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, l'identità di Parseval e il teorema di Brun-Titchmarsh si ha che

$$\sum_{\mathfrak{m}}=\sum_{N<2n\le N+H}\int_{\mathfrak{m}} S_1(\xi)S_2(\xi)e(-2n\xi)\,d\xi\int_{\mathfrak{m}}\overline{S_1(\alpha)S_2(\alpha)}e(2n\alpha)\,d\alpha$$

$$\ll\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\xi)S_2(\xi)|\left(\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\alpha)S_2(\alpha)|\min\left\{H,\frac{1}{||2(\alpha-\xi)||}\right\}d\alpha\right)d\xi$$

$$\ll\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\xi)S_2(\xi)|\left[\left(\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\alpha)|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathfrak{m}}|S_2(\alpha)|^2\min\left\{H^2,\frac{1}{||2(\alpha-\xi)||^2}\right\}d\alpha\right)^{1/2}\right]d\xi$$

$$\ll(YL)^{1/2}\left(\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\xi)S_2(\xi)|d\xi\right)\sup_{\xi\in\mathfrak{m}}\left(\int_{\mathfrak{m}}|S_2(\alpha)|^2\min\left\{H^2,\frac{1}{||2(\alpha-\xi)||^2}\right\}d\alpha\right)^{1/2}$$

$$\ll (YL)^{3/2} \sup_{\xi\in[0,1]} \left(\int_{\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2 \min\left\{H^2, \frac{1}{||2(\alpha-\xi)||^2}\right\} d\alpha \right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Scegliamo $Y = N$ e $H = Y^{1/3+\varepsilon}$ nel Teorema 3.1.1 e $Y = N^{7/12}$ e $H = Y^{1/3+\varepsilon}$ nel Teorema 3.1.2 .

Grazie a tali scelte da (3.1) e (3.3) e dal fatto che ε può essere preso arbitrariamente piccolo, abbiamo che per provare Teorema 3.1.1 e 3.1.2 è sufficiente dimostrare

$$\sum_{\mathfrak{M}} \ll HY^2L^{-A} \tag{3.4}$$

e

$$\int_{(\xi-1/H,\xi+1/H)\cap\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \ll Y^2L^{-2A-3} \tag{3.5}$$

uniformemente per $\xi \in [0,1]$.

1.4. Gli archi maggiori.

In questa sezione proviamo che (3.4) vale per ogni $N^{7/12+\varepsilon} \leq Y \leq N$.
La dimostrazione è essenzialmente una versione in intervalli corti dell'argomento classico (vedi [**Vau81**], cap. 3). Lo strumento principale che usiamo è una versione in intervalli corti del teorema di Siegel-Walfisz. Ad esempio usando i risultati di [**PPS85**] si ha che:

se $N^{7/12+\varepsilon} \leq Y \leq N$ *e* $q \leq L^B$*, allora*

$$\psi(N,\chi) - \psi(N-Y,\chi) = \delta_\chi Y + O_{B,C,\varepsilon}(YL^{-C}) \tag{3.6}$$

per ogni $\chi \pmod q$ *e* $C > 0$.

Abbiamo allora che

$$\int_{\mathfrak{M}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e(-2n\alpha)\, d\alpha = \sum_{q\leq L^B} \sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q} e\left(-\frac{2na}{q}\right) \left\{ \frac{\mu(q)^2}{\varphi^2(q)} \int_{\xi'_q} T_1(\eta)T_2(\eta)e(-2n\eta)\, d\eta \right.$$

$$+\frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \int_{\xi'_q} \left(T_1(\eta)R_2(\eta,q,a) + T_2(\eta)R_1(\eta,q,a)\right) e(-2n\eta)\, d\eta$$

$$\left. + \int_{\xi'_q} R_1(\eta,q,a)R_2(\eta,q,a)e(-2n\eta)\, d\eta \right\} = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 . \tag{3.7}$$

Siccome

$$\int_{\xi'_q} T_1(\eta)T_2(\eta)e(-2n\eta)\, d\eta = \int_{-\frac12}^{\frac12} T_1(\eta)T_2(\eta)e(-2n\eta)\, d\eta + O\left(\frac{qY}{L^{2B}}\right)$$

$$= M^*(2n) + O\left(\frac{qY}{L^{2B}}\right),$$

abbiamo

$$\sum_1 = M^*(2n) \sum_{q \le L^B} \frac{\mu(q)^2}{\varphi^2(q)} c_q(-2n) + O(YL^{-B})$$

$$= M^*(2n)\mathfrak{S}(2n) + O\left(Y \left| \sum_{q > L^B} \frac{\mu(q)^2}{\varphi^2(q)} c_q(-2n) \right| \right) + O(YL^{-B}).$$

Con argomenti classici (vedi [**Vau81**], cap.3) otteniamo

$$\sum_{N \le 2n \le N+H} \left| \sum_{q > L^B} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-2n) \right|^2 \ll HL^{-A}$$

da cui segue che

$$\sum_{N \le 2n \le N+H} \left| \sum_1 - M^*(2n)\mathfrak{S}(2n) \right|^2 \ll HY^2L^{-A} \ . \tag{3.8}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz deduciamo

$$\sum_2 \ll Y^{1/2} L^B \max_{\substack{q \le L^B \\ (a,q)=1}} \max_{i=1,2} \left(\int_{\xi'_q} |R_i(\eta, q, a)|^2 d\eta \right)^{1/2} \tag{3.9}$$

$$\sum_3 \ll L^{2B} \max_{\substack{q \le L^B \\ (a,q)=1}} \max_{i=1,2} \int_{\xi'_q} |R_i(\eta, q, a)|^2 d\eta. \tag{3.10}$$

La stima di $\int_{\xi'_q} |R_2(\eta, q, a)|^2 d\eta$ segue da argomenti classici che utilizzano il teorema di Siegel-Walfisz. Il suo contributo a (3.9) e (3.10) è allora

$$\ll YL^{-A/2}. \tag{3.11}$$

Per stimare $\int_{\xi'_q} |R_1(\eta, q, a)|^2 d\eta$ è necessario usare (3.6). Si ha

$$R_1(\eta, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \chi(a)\tau(\overline{\chi})W_1(\chi, \eta) + O(\sqrt{Y}).$$

Per sommazione parziale dalla (3.6) e da $\tau(\chi) \ll q^{1/2}$ deduciamo

$$R_1(\eta, q, a) \ll_{B,C,\varepsilon} q^{1/2}[YL^{-C} + q^{-1}YL^{2B-C}] + Y^{1/2} \ll_{B,C,\varepsilon} YL^{2B-C} \tag{3.12}$$

uniformemente per $\eta \in \xi'_q$, $q \le L^B$ e $(a, q) = 1$.
Il contributo di $\int_{\xi'_q} |R_1(\eta, q, a)|^2 d\eta$ a (3.9) e (3.10) è allora

$$\ll_{B,C,\varepsilon} Y \max(L^{4B-C}, L^{8B-2C}) \ll YL^{-A/2} \tag{3.13}$$

se $C \geq 4B + A/2$. Da (3.7), (3.8), (3.11) e (3.13) otteniamo

$$\sum_{\mathfrak{M}} \ll HY^2L^{-A}.$$

1.5. Gli archi minori.

In questa sezione proviamo che (3.5) vale $\forall Y \geq Y_0(A,\varepsilon)$ e $H \geq Y^{1/3+\varepsilon}$.
Osserviamo che, per $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$ e $q, q' \leq Q$, abbiamo

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \geq \frac{1}{Q^2} = \frac{4}{H}$$

e quindi ci sono al più due archi

$$I''_{q,a} = \begin{cases} I_{q,a} \setminus I'_{q,a} & \text{se } q \leq L^B \\ I_{q,a} & \text{se } q > L^B \end{cases}$$

con $q \leq Q$ e $(a,q) = 1$, che intersecano $\left(\xi - \frac{1}{H}, \xi + \frac{1}{H}\right)$. Allora la dimostrazione di (3.5) si riduce a provare che

$$\max_{\substack{q \leq Q \\ (a,q)=1}} \int_{I''_{q,a}} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \ll YL^{-2A-3}. \tag{3.14}$$

Poniamo

$$S_2\left(\frac{a}{q} + \eta\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} T_2(\eta) + R_2(\eta, q, a)$$

con

$$R_2(\eta, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\tau(\overline{\chi}) W_2(\chi, \eta) + O(\sqrt{Y}).$$

Il contributo di $\dfrac{\mu(q)}{\varphi(q)} T_2(\eta)$ a (3.14) è chiaramente $O(YL^{-2A-3})$.

Per stimare il contributo di $R_2(\eta, q, a)$ a (3.14) si suddividono i caratteri in due classi. Chiamiamo un carattere χ **buono** se $L(s,\chi)$ non ha zeri nel rettangolo

$$1 - \frac{2B \log L}{L} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq Y, \tag{3.15}$$

altrimenti lo chiamiamo **cattivo**. Per la regione priva di zeri per le funzioni L di Dirichlet (vedi [**Pra57**] cap.8) ed il teorema di Siegel deduciamo $L(s,\chi) \neq 0$ nella regione

$$\sigma > 1 - \frac{c(\varepsilon')}{\max(q^{\varepsilon'}, \log^{4/5}(|t|+2))}$$

con $\varepsilon' > 0$ è arbitrario e $c(\varepsilon') > 0$. Quindi l'esistenza di un carattere cattivo implica

$$q \gg_{\varepsilon'} L^{1/2\varepsilon'}. \tag{3.16}$$

Inoltre la stima di densità

$$\sum_{\chi(\bmod q)} N(\sigma,T,\chi) \ll_\varepsilon (qT)^{\left(\frac{12}{5}+\varepsilon\right)(1-\sigma)} \log^{14} T, \tag{3.17}$$

(vedi [**Mon71**], Teorema 12.1, e [**Hux75**]) implica che il numero di caratteri cattivi per ogni modulo $q \leq Q$ è

$$\ll L^{6B}. \tag{3.18}$$

Poichè $\tau(\chi) \ll q^{1/2}$, dalla (3.18) abbiamo

$$\int_{I''_{q,a}} |R_2(\eta,q,a)|^2 d\eta \ll \frac{q}{\varphi(q)^2} L^{12B} \max_{\chi \text{ cattivo}} \int_{I''_{q,a}} |W_2(\chi,\eta)|^2 d\eta$$

$$+\frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \text{ buono}} \int_{I''_{q,a}} |W_2(\chi,\eta)|^2 d\eta + \frac{Y}{qQ}.$$

Pertanto dalla (3.16) con $\varepsilon' = 1/30B$ e dall'identità di Parseval si ha

$$\int_{I''_{q,a}} |R_2(\eta,q,a)|^2 d\eta \ll \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \text{ buono}} \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |W_2(\chi,\eta)|^2 d\eta + YL^{-2A-3}. \tag{3.19}$$

Allora per il lemma di Gallagher otteniamo

$$\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |W_2(\chi,\eta)|^2 d\eta \ll \frac{1}{(qQ)^2} \int_{-\frac{qQ}{2}}^{Y} \Big| \sum_{\substack{n=x \\ n\in[1,Y]}}^{x+\frac{qQ}{2}} (\Lambda(n)\chi(n) - \delta_\chi) \Big|^2 dx$$

$$\ll \frac{1}{(qQ)^2} \int_{100qQ}^{Y} \Big| \sum_{\substack{n=x \\ n\in[1,Y]}}^{x+\frac{qQ}{2}} (\Lambda(n)\chi(n) - \delta_\chi) \Big|^2 dx + \frac{1}{(qQ)^2} \int_{1}^{100qQ} \Big| \sum_{n\leq x} (\Lambda(n)\chi(n) - \delta_\chi) \Big|^2 dx. \tag{3.20}$$

Usando la formula esplicita (vedi Prachar [**Pra57**], cap. 7, Satz 4.4)

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\chi(n) - \delta_\chi x = -\sum_{|\gamma|\leq Y} \frac{x^\rho}{\rho} + O(L^2) \tag{3.21}$$

valida uniformemente per $q \leq Y$, $\chi(\bmod q)$ e $4 \leq x \leq 2Y$, dove la somma è sugli zeri non banali di $L(s,\chi)$, si prova facilmente che il contributo a (3.19) del secondo termine del membro di destra di (3.20) è

$$\ll q^2 Q \ll YL^{-2A-3}. \tag{3.22}$$

Per trattare il primo termine del membro di destra di (3.20) usiamo l'argomento di Saffari-Vaughan [**SV77**] (lemmi 5 e 6) .

Procedendo analogamente a [**PP92**] abbiamo

$$\frac{1}{(qQ)^2}\int_{100qQ}^{Y}\Big|\sum_{\substack{n=x\\ n\in[1,Y]}}^{x+\frac{qQ}{2}}(\Lambda(n)\chi(n)-\delta_\chi)\Big|^2dx$$

$$\ll\frac{L}{(qQ)^2}\sup_{100qQ\le M\le Y}\ \sup_{\frac{qQ}{20M}\le\theta\le\frac{20qQ}{M}}\int_{M}^{3M}\Big|\sum_{n=x}^{x+\theta x}(\Lambda(n)\chi(n)-\delta_\chi)\Big|^2dx. \tag{3.23}$$

Usando la formula esplicita (3.21) nella parte di destra di (3.23) e stimando come in [**PP92**] si ha, da (3.15), (3.20), (3.22) e (3.23), che

$$\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \text{buono}}\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}|W_2(\chi,\eta)|^2d\eta$$

$$\ll\frac{L^5}{(qQ)^2}\sup_{100qQ\le M\le Y}\left(\frac{qQ}{M}\right)^2\sup_{\frac12\le\sigma\le1-\frac{2B\log L}{L}}M^{2\sigma+1}\sum_{\chi}N\left(\sigma,\frac{20M}{qQ},\chi\right)$$

$$+\frac{L^6}{(qQ)^2}\sup_{100qQ\le M\le Y}\ \sup_{\frac{20M}{qQ}\le K\le Y}K^{-2}\sup_{\frac12\le\sigma\le1-\frac{2B\log L}{L}}M^{2\sigma+1}\sum_{\chi}N(\sigma,K,\chi)$$

$$+YL^{-2A-3}. \tag{3.24}$$

E' chiaro che il valore critico per K in (3.24) è ottenuto per $K=\frac{20M}{qQ}$ e corrisponde al primo termine della parte di destra di (3.24). Allora usando la stima di densità (3.17) otteniamo che il termine di destra di (3.24) è

$$\ll L^6\sup_{\frac12\le\sigma\le1-\frac{2B\log L}{L}}Y^{2\sigma-1}\left(\frac{Y}{Q}\right)^{\left(\frac{12}{5}+\varepsilon\right)(1-\sigma)}L^{14}+YL^{-2A-3}$$

$$\ll L^{20}\sup_{\frac12\le\sigma\le1-\frac{2B\log L}{L}}Y^{1-\frac{\varepsilon}{3}(1-\sigma)}+YL^{-2A-3}. \tag{3.25}$$

La (3.5) segue allora da (3.19) e da (3.25).

NOTA

Per raggiungere una stime coerente con quella per l'intervallo lungo ottenuta da Goldston è necessario evitare l'uso del Lemma di Gallagher. Ciò può essere fatto usando la funzione $\widetilde{S}(\alpha)$ al posto di $S(\alpha)$. Per la definizione di $\widetilde{S}(\alpha)$ si veda il seguente paragrafo 4.2.

2. Risultati condizionali

Come abbiamo già visto nel paragrafo precedente, il metodo del cerchio è stato usato da Perelli-Pintz per ottenere che quasi tutti gli interi pari nell'intervallo $[N, N+H]$, con $H \geq N^{7/36+\varepsilon}$, sono numeri di Goldbach. Inserendo l'ipotesi di Riemann Generalizzata (GRH) nella tecnica vista nel paragrafo precedente, Kaczorowski-Perelli-Pintz, nel loro lavoro [**KPP93**], sono riusciti ad accorciare l'intervallo portandolo a $H \geq L^{10+\varepsilon}$.

2.1. I risultati.

Teorema 3.2.1 (Kaczorowski-Perelli-Pintz) *Supponiamo che GRH sia vera. Allora*

$$\sum_{N \leq 2n \leq N+H} |R(2n) - 2n\mathfrak{S}(2n) + F(n, N, H)|^2 \ll H^{1/2} N^2 L^5$$

con $F(n, N, H)$ è una funzione che verifica

$$F(n, N, H) \ll NH^{-1/8}(L^2 \log H)^{1/2}.$$

Osservando che $\mathfrak{S}(2n) \gg 1$ e $F(n, N, H) = o(N)$ uniformemente per $N \leq 2n \leq N+H$ e $H \geq L^{8+\varepsilon}$, si deduce

Corollario 3.2.1 *Supponiamo che GRH sia vera e che $HL^{-10} \to \infty$. Allora tutti gli interi pari in $[N, N+H]$, con $O(H^{1/2}L^5)$ eccezioni, sono somma di due primi.*

Si può notare che tali risultati sono ancora veri se si assume l'Ipotesi di Riemann solo per le funzioni L di Dirichlet associate a caratteri modulo tutti i $q \leq H^{1/2}$.

2.2. Gli archi maggiori.

Operiamo la scelta $Q = \sqrt{H}/2$ per il livello degli archi di Farey e P, il livello degli archi maggiori, sarà scelto in seguito.

Scrivendo

$$S\left(\frac{a}{q} + \eta\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} T(\eta) + R(\eta, q, a),$$

con

$$T(\alpha) = \sum_{n \leq 2N} e(n\alpha),$$

si ha allora che

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^2 e(-2n\alpha)\, d\alpha = \sum_{q \leq P} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} \sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q} e\left(-\frac{2na}{q}\right) \int_{\xi_{q,a}} T(\eta)^2 e(-2n\eta)\, d\eta$$

$$+2 \sum_{q \leq P} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{q} e\left(-\frac{2na}{q}\right) \int_{\xi_{q,a}} T(\eta) R(\eta, q, a) e(-2n\eta)\, d\eta$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}^{*} e\left(-\frac{2na}{q}\right)\int\limits_{\xi_{q,a}} R(\eta,q,a)^2 e(-2n\eta)\,d\eta=\sum_1+\sum_2+\sum_3. \tag{3.26}$$

Si ha

$$\sum_1=\sum_{q\le P}\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}\sum_{a=1}^{q}{}^{*} e\left(-\frac{2na}{q}\right)\int\limits_0^1 T(\eta)^2 e(-2n\eta)\,d\eta+O\left(Q\sum_{q\le P}\frac{q}{\varphi(q)}\right)=$$

$$=2n\sum_{q\le P}\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}c_q(-2n)+O(PQ) \tag{3.27}$$

dove $c_q(m)$ è la somma di Ramanujan. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\sum_3\ll\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}|R(\eta,q,a)|^2 d\eta \tag{3.28}$$

$$\sum_2\ll N^{1/2}\sum_{q\le P}\varphi(q)^{-1/2}\left(\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}|R(\eta,q,a)|^2 d\eta\right)^{1/2}. \tag{3.29}$$

Per l'ortogonalità dei caratteri si ha

$$\sum_{a=1}^{q}{}^{*}\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}|R(\eta,q,a)|^2 d\eta\ll\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi \pmod q}\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}|W(2N,\chi,\eta)|^2 d\eta=\frac{\varphi(q)L^4}{qQ}. \tag{3.30}$$

Stimiamo il termine di destra di (3.30) mediante il seguente

Lemma 3.2.1. *Assumiamo GRH. Allora per ogni* $\chi \pmod q$

$$\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}|W(2N,\chi,\eta)|^2 d\eta\ll\frac{NL^4}{qQ}.$$

Dim.
Per il lemma di Gallagher si ha

$$\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}|W(2N,\chi,\eta)|^2 d\eta\ll\frac{1}{(qQ)^2}\int\limits_{-2N}^{2N}\Big|\sum_{n\in[x,x+2qQ]\cap[1,2N]}(\Lambda(n)\chi(n)-\delta_\chi)\Big|^2 dx. \tag{3.31}$$

Ragionando come nel Lemma 6 di Saffari-Vaughan [**SV77**] abbiamo che l'integrale al membro di destra di (3.31) è $\ll NqQL^4$, da cui la tesi. □

Dal lemma precedente e (3.30) segue che

$$\sum_{a=1}^{q}{}^{*} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \ll \frac{NL^4}{Q} \tag{3.32}$$

e quindi per le (3.28), (3.29) e (3.32) otteniamo

$$\sum_2 + \sum_3 \ll \frac{PNL^4}{Q} + \left(\frac{P}{Q}\right)^{1/2} NL^2 \ll \left(\frac{P}{Q}\right)^{1/2} NL^2 \tag{3.33}$$

se

$$P \ll QL^{-4}. \tag{3.34}$$

Poichè P sarà scelto in funzione di N, H, allora dalle (3.26), (3.27) e (3.33) deduciamo

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^2 e(-2n\alpha)\, d\alpha - 2n\mathfrak{S}(2n) = -2n \sum_{q>P} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-2n) - F(n, N, H) \tag{3.35}$$

dove $F(n, N, H)$, definita dall'equazione precedente, verifica

$$F(n, N, H) \ll \left(\frac{P}{Q}\right)^{1/2} NL^2 + PQ \tag{3.36}$$

nel caso in cui (3.34) valga, e la serie in (3.35) è convergente.

Dalla (3.35) si ha allora che

$$\begin{aligned} \sum_{N \le 2n \le N+H} |R(2n) - 2n\mathfrak{S}(2n) + F(n, N, H)|^2 \le \sum_{N \le 2n \le N+H} \left| \int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^2 e(-2n\alpha) \right|^2 \\ + \sum_{N \le 2n \le N+H} \left| 2n \sum_{q>P} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-2n) \right|^2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

con $F(n, N, H)$ che verifica (3.36). Per stimare la seconda somma nella parte di destra di (3.37) utilizziamo il seguente

Lemma 3.2.2 *Se $P \le H^{1/2}$ si ha*

$$\sum_{N \le m \le N+H} \left| \sum_{q>P} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-m) \right|^2 \ll \frac{H \log^3 P}{P^2} + L^2.$$

La dimostrazione si ottiene ragionando direttamente sulla somma in questione (vedi [**KPP93**]).

Da (3.37) e Lemma 3.2.2 si ha allora

$$\sum_{N \le 2n \le N+H} \left| 2n \sum_{q>P} \frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2} c_q(-2n) \right|^2 \ll \frac{N^2 H \log^3 P}{P^2} + (NL)^2 \tag{3.38}$$

poichè $P < Q = \sqrt{H}/2$.

2.3. Gli archi minori.

Sia $t(k) = \frac{1}{H}\max(2H - |k|, 0)$. Allora, a causa della scelta di Q, usando le proprietà del nucleo di Fejer si ha

$$K(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t(k)e(-k\alpha) \ll \frac{1}{H}\min(H^2, \frac{1}{||\alpha||^2}),$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{N\le 2n\le 2N}\left|\int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^2 e(-2n\alpha)d\alpha\right|^2 &\le \sum_{n} t(n-N)\left|\int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^2 e(-2n\alpha)d\alpha\right|^2 \\
&= \sum_{n} t(n-N)\int_{\mathfrak{m}}\int_{\mathfrak{m}} \overline{S(\xi)}^2 S(\alpha)^2 e(-2n(\alpha-\xi))d\alpha d\xi \\
&\ll NL\max_{\xi\in[0,1]}\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2|K(2(\alpha-\xi))|d\alpha \\
&\ll NL\max_{\xi\in[0,1]}\sum_{k=-2H}^{2H}\frac{H}{k^2+1}\int_{(\xi-\frac{k}{2H}-1/H,\xi-\frac{k}{2H}+1/H)\cap\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 d\alpha \\
&\ll HNL\max_{\xi\in[0,1]}\int_{(\xi-1/H,\xi+1/H)\cap\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 d\alpha \\
&\ll HNL\max_{\substack{P<q\le Q\\(a,q)=1}}\int_{-1/qQ}^{1/qQ}\left|S\left(\frac{a}{q}+\eta\right)\right|^2 d\eta. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Dalla (3.32) e da $P < q \le Q$ deduciamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1/qQ}^{1/qQ}\left|S\left(\frac{a}{q}+\eta\right)\right|^2 d\eta &\ll \frac{1}{\varphi(q)^2}\int_{-1/qQ}^{1/qQ}|T(\eta)|^2 d\eta + \int_{-1/qQ}^{1/qQ}|R(\eta,q,a)|^2 d\eta \\
&\ll \frac{N}{\varphi(q)^2} + \frac{NL^4}{Q} \ll \frac{N\log^2 P}{P^2} + \frac{NL^4}{Q},
\end{aligned}$$

cosicchè dalla (3.39) otteniamo

$$\sum_{n\le 2n\le 2N}\left|\int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^2 e(-2n\alpha)d\alpha\right|^2 \ll \frac{HN^2L\log^2 P}{P^2} + \frac{HN^2L^5}{Q}. \qquad (3.40)$$

Allora per (3.37), (3.38) e (3.40) si ha

$$\sum_{N\le 2n\le N+H} |R(2n) - 2n\mathfrak{S}(2n) + F(n,N,H)|^2$$

$$\ll \frac{HN^2L\log^2 P}{P^2} + \frac{HN^2L^5}{Q}. \tag{3.41}$$

Scegliendo $P = \dfrac{H^{1/4}\log H}{L^2}$, si ha che (3.34) è vera per $H \gg (L^2\log H)^4$. Inoltre (3.36) diventa

$$F(n,N,H) \ll NH^{-1/8}(L^2\log H)^{1/2}$$

ed il termine di destra di (3.41) è $\ll N^2H^{1/2}L^5$. Il Teorema 3.2.1 è così provato. $\square$

NOTA:

Per raggiungere una stima coerente con quella per l'intervallo lungo ottenuta da Goldston è necessario evitare l'uso del Lemma di Gallagher. Ciò può essere fatto usando la funzione $\widetilde{S}(\alpha)$ al posto di $S(\alpha)$. Tale applicazione è spiegata nella sezione 5 di A. Languasco, A. Perelli, *"A pair correlation hypothesis and the exceptional set in Goldbach's problem"*, Mathematika, **43** (1996), 349-361. Per la definizione di $\widetilde{S}(\alpha)$ si veda il seguente paragrafo 4.2.3.

CAPITOLO 4

Numeri di Goldbach in intervalli corti

1. Risultati incondizionali

Nel caso in cui sia richiesto che i G-numeri in $[N, N+H]$ siano soltanto una proporzione positiva dei numeri pari nello stesso intervallo, la tecnica di Ramachandra [**Ram73**] e Montgomery-Vaughan [**MV75**] consente di concludere che, posto $H = N^{\theta}$ e detti θ_1 e θ_2 due numeri tali che

(i) ogni intervallo $[x, x+H_1]$ con $H_1 \geq x^{\theta_1+\varepsilon}$ contiene $\gg \frac{H_1}{\log x}$ numeri primi,

(ii) tutti, tranne al più $o(\frac{X}{\log X})$, gli intervalli della forma $[x, x+H_2]$, $x \in \mathbb{N} \cap [1, X]$ e $H_2 \geq x^{\theta_2+\varepsilon}$, contengono $\gg \frac{H_2}{\log x}$ numeri primi,

se $\theta > \theta_1\theta_2 + \varepsilon$ allora i G-numeri in $[N, N+H]$ sono una proporzione positiva dei numeri pari nello stesso intervallo.

Quindi θ è collegato sia al livello di distribuzione dei primi in intervalli corti che al livello di distribuzione dei primi in "quasi tutti" gli intervalli corti. Allo stato attuale della ricerca i migliori risultati sono $\theta_1 = 0.535$ (Baker-Harman [**BH**]) e $\theta_2 = \frac{1}{14}$ (Watt [**Wat**]), quindi la tecnica di Ramachandra e Montgomery-Vaughan consente di ottenere che i G-numeri in $[N, N+H]$ sono una proporzione positiva dei numeri pari nello stesso intervallo se $H \gg N^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 0.535\frac{1}{14} = 0.03821....$

Proviamo il risultato di Ramachandra e Montgomery-Vaughan.

Teorema 4.1.1 (Ramachandra e Montgomery-Vaughan). *Supponiamo che valgano (i) e (ii). Sia $\theta > \theta_1\theta_2 + \varepsilon$. Allora, per N sufficientemente grande si ha*

$$\sum_{n \in [N, N+N^{\theta}]} r(n) \gg N^{\theta} ,$$

dove $r(n) = \sum\limits_{n=p_1+p_2} 1.$

Per la dimostrazione servono i seguenti lemmi

Lemma 4.1.2 *Siano h, x, Y interi tali che $Y^{\theta_2+\varepsilon} \leq h \leq Y$, $Y \geq x^{\theta_1+\varepsilon}$ e $Y \leq \frac{x}{3}$. Allora*

$$\sum_{y=Y}^{2Y} (\psi(x+h-y) - \psi(x-y))(\psi(y+h) - \psi(y)) = h^2 Y(1 + o(1)).$$

Dim. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{y=Y}^{2Y}(\psi(x+h-y)-\psi(x-y))(\psi(y+h)-\psi(y))\\
&=\sum_{y=Y}^{2Y}\left[\psi(x+h-y)-\psi(x-y)\right]\left[(\psi(y+h)-\psi(y)-h)+h\right]\\
&=h\sum_{y=Y}^{2Y}\left(\psi(x+h-y)-\psi(x-y)\right)\\
&+O\left(\sqrt{Y}\left[\max_{y\in[Y,2Y]}\left(\psi(x+h-y)-\psi(x-y)\right)\right]\left[\sum_{y=Y}^{2Y}\left(\psi(y+h)-\psi(y)-h\right)^2\right]^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

Il termine d'errore è $O(h^2Ye^{-(1/6)\log x})$ per $h \geq Y^{\theta_2+\varepsilon}$, mentre il termine principale è uguale a

$$h\sum_{n=x-2Y}^{x-2Y+h-1}\left(\psi(n+Y)-\psi(n)\right)\sim h^2Y$$

se $Y \geq x^{\theta_1+\varepsilon}$ (vedi ad es. Ramachandra [**Ram76**]). Da ciò segue il lemma. □

Il seguente lemma è una banale conseguenza del precedente.

Lemma 4.1.3 *Nelle ipotesi del lemma precedente si ha che esiste $y_0 \in [Y, 2Y]$ tale che*

$$(\psi(x+h-y_0)-\psi(x-y_0))(\psi(y_0+h)-\psi(y_0)) \geq h^2(1+o(1)).$$

Il lemma successivo consente di collegare i numeri di Goldbach con la distribuzione dei primi in intervalli corti.

Lemma 4.1.4 *Sia*

$$r(n,h)=\left|\{n : n=p_1+p_2,\ p_i \text{ t. c. } x-y_0\leq p_1\leq x+h-y_0\,, y_0\leq p_2\leq y_0+h\}\right|.$$

Allora nelle ipotesi dei lemmi precedenti si ha

$$\log^2 x\sum_{n=x}^{x+2h} r(n,h)\geq h^2(1+o(1)).$$

Dim. Poichè

$$\sum_{n=x}^{x+2h} r(n,h)=\sum_{n=x}^{x+2h}\ \sum_{\substack{n=p_1+p_2\\ p_1\in[x-y_0,x+h-y_0]\\ p_2\in[y_0,y_0+h]}} 1=[\pi(x+h-y_0)-\pi(x-y_0)][\pi(y_0+h)-\pi(y_0)],$$

dal Lemma 4.1.3 otteniamo

$$\begin{aligned}
&\log^2 x(\pi(x+h-y_0)-\pi(x-y_0))(\pi(y_0+h)-\pi(y_0))\\
&\geq(\vartheta(x+h-y_0)-\vartheta(x-y_0))(\vartheta(y_0+h)-\vartheta(y_0)).
\end{aligned}$$

La tesi segue allora dalla relazione $\psi(x)-\vartheta(x)\ll\sqrt{x}(\log x)^2$. □

Il seguente lemma è il Corollario 5.8.3 di [**HR74**], p. 179.

Lemma 4.1.5 *Abbiamo*

$$r(n,h) \leq 8\mathfrak{S}(n)\frac{h}{\log^2 h}\left(1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right)$$

e le costanti implicite in O sono assolute.

Lemma 4.1.6

$$\sum_{n=x}^{x+2h}\prod_{2<p|n}\left(1 - \frac{1}{p-2}\right)^2 \leq 2h(1+o(1))\prod_{2<p}\left(1 + \frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right).$$

Dim. Poichè nel prodotto al primo membro il contributo dei termini $p > \log x$ è trascurabile possiamo supporre $p \leq \log x$. Allora

$$\sum_{n=x}^{x+2h}\prod_{2<p|n}\left(1 - \frac{1}{p-2}\right)^2 < 2h + 1 + \sum_r \sum_{x \leq p_1 \ldots p_r \leq x+2h}\left(\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{2}{p_j - 2} + \frac{1}{(p_j-2)^2}\right)\right)$$

con $2 < p_1 < \cdots < p_r \leq \log x$. Segue che

$$\sum_{n=x}^{x+2h}\prod_{2<p|n}\left(1 - \frac{1}{p-2}\right)^2 \leq 2h + \sum_r\left(\frac{2h}{p_1 \ldots p_r} + 2\right)\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{2}{p_j-2} + \frac{1}{(p_j-2)^2}\right)$$

$$< 2h\left(1 + \prod_p \frac{2p-3}{p(p-2)^2} + \frac{2}{h}\prod_p \frac{2p-3}{(p-2)^2}\right)$$

$$< 2h\left(1 + \left(\prod_p \frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right)\left(1 + \frac{2}{h}\prod_p p\right)\right)$$

$$< \prod_{2<p|n}\left(1 - \frac{1}{p-2}\right)^2 \leq 2h(1+o(1))\prod_{2<p}\left(1 + \frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right). \quad \square$$

Dimostrazione del Teorema 4.1.1

Siano $h = [Y^{\theta_2}]$ e $Y = [x^{\theta_1}]$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz fornisce

$$\frac{\left(\sum\limits_{n=x}^{x+2h} r(n,h)\right)^2}{\left(\sum\limits_{n=x}^{x+2h} r(n,h)^2\right)} \leq \left(\sum_{\substack{n=x \\ r(n,h)\geq 1}}^{x+2h} 1\right).$$

Dal Lemma 4.1.6 otteniamo

$$\sum_{n=x}^{x+2h} r(n,h)^2 \leq 512\frac{h^3}{(\log h)^4}\left(\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)^2 \prod_{p>2}\left(1 + \frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right)$$

e quindi, per Lemma 4.1.4, abbiamo

$$\sum_{\substack{n=x\\ r(n,h)\geq 1}}^{x+2h} 1 \geq \frac{1}{256}h\left(\frac{\log h}{\log x}\right)^4\left(\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)^{-2}\left(\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right)\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{256}h(\theta_1\theta_2)^4\left(\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)^{-2}\left(\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right)\right)^{-1}.$$

Pertanto se $c>0$ è una costante positiva tale che

$$16\sqrt{c}(\theta_1\theta_2)^{-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p>2}\left(1+\frac{2p-3}{p(p-2)^2}\right)^{1/2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si ha

$$\sum_{\substack{n=x\\ r(n,h)\geq 1}}^{x+2h} 1 \geq ch,$$

ossia la tesi. □

2. Risultati condizionali

Nel 1952 Linnik [**Lin52**] provò , assumendo RH, che :

$\forall\varepsilon>0$ *e* N *sufficientemente grande l'intervallo* $[N, N+L^{3+\varepsilon}]$ *contiene almeno un G-numero.*

Linnik utilizzò il metodo del cerchio applicato non alla funzione $S(\alpha)$ ma alla sua versione "liscia"

$$\widetilde{S}(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)e^{-n/N}e(n\alpha).$$

La scelta di $\widetilde{S}(\alpha)$ è dovuta al fatto che essa ammette la seguente formula esplicita

$$\widetilde{S}(\alpha)=\frac{1}{z}-\sum_{\rho}z^{-\rho}\Gamma(\rho)+O(L^3),$$

dove $z=\frac{1}{N}-2\pi i\alpha$ e $\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$ varia sugli zeri non banali di $\zeta(s)$, di più facile uso rispetto alla corrispondente formula esplicita per $S(\alpha)$, vedi [**BH82**], Lemma 12.

Gli sviluppi successivi non si sono più basati sul metodo del cerchio, bensì su una tecnica basata sulla media dei primi in intervalli corti. Tale tecnica risulta essere più semplice, ed inoltre si riteneva che l'utilizzo di $\widetilde{S}(\alpha)$ al posto di $S(\alpha)$ e l'utilizzo della formula di Parseval in una parte critica dell'intervallo unitario impedisse la possibilità di migliorare il risultato di Linnik.

In tal modo Kátai [**Ká67**] e Montgomery-Vaughan [**MV75**] migliorarono, indipendentemente, il risultato di Linnik portando la lunghezza dell'intervallo da $L^{3+\varepsilon}$ a CL^2, per una costante $C>0$ opportuna. Questo risultato viene esposto nel paragrafo 4.2.1.

Nel 1990 Goldston [**Gol90**] ha osservato che è possibile superare il problema dato dall'uso dell'identità di Parseval nel metodo di Linnik (vedi paragrafo 4.2.2) riottenendo il risultato di Kátai e Montgomery-Vaughan con un metodo misto che utilizza sia il metodo del cerchio che stime per le medie dei primi in intervalli corti. Nel 1994 l'autore in collaborazione con A. Perelli, ha provato in [**LP94**], vedi paragrafo 4.2.3, che la perdita di un fattore logaritmo nel lavoro di Linnik rispetto al risultato di Kátai e Montgomery-Vaughan non è dovuta all'uso della somma liscia, ma al modo non ottimale di utilizzare la formula esplicita per $\widetilde{S}(\alpha)$. In questo modo è stato possibile riottenere il risultato di Kátai e Montgomery-Vaughan usando unicamente il metodo del cerchio, mostrando così che l'approccio originale di Linnik è essenzialmente equivalente ai metodi impiegati successivamente

Inoltre sempre negli anni '90 Goldston ha osservato (vedi parag. 4.2.4) che, supponendo oltre RH anche la Congettura di Montgomery (MC), si può ottenere l'esistenza di G-numeri in intervalli di lunghezza $\log N$, mentre Goldston e Friedlander [**FrGo92**], vedi parag. 4.2.5, assumendo ulteriormente la congettura di Elliott-Halberstam, oltre ad RH e MC, hanno ottenuto intervalli di lunghezza $(\log\log N)^B$, per qualche $B > 0$ sufficientemente grande.

2.1. Il risultato di Kátai e Montgomery-Vaughan.

Il metodo di Kátai e Montgomery-Vaughan si basa sulla seguente stima provata da Selberg [**Sel43**] assumendo RH,

$$J(N,H) = \int_1^N (\psi(x+H) - \psi(x) - H)^2\, dx \ll HNL^2. \tag{4.1}$$

Osserviamo che tale stima è stata riottenuta, con metodi diversi, da Gallagher [**Gal80**] e Saffari-Vaughan [**SV77**].

Teorema 4.2.1.1 (Kátai e Montgomery-Vaughan). *Assumiamo RH. Allora esiste $C > 0$ costante assoluta tale che, per N sufficientemente grande, l'intervallo $[N, N + CL^2]$ contiene almeno un G-numero.*

Dim.

Sia H un intero. Supponiamo che l'intervallo $[N, N+H]$ non contenga G-numeri. Allora almeno uno dei due intervalli $[Y, Y + \frac{H}{2}]$ e $[N - Y, N - Y + \frac{H}{2}]$ non contiene primi.

Ricopriamo $[1, N]$ mediante gli intervalli $[\frac{N}{2} + \frac{kH}{2}, \frac{N}{2} + \frac{(k+1)H}{2}]$, dove $k \in \mathbb{Z}$ e $-\frac{N}{2H} < k < \frac{N}{2H}$. Osservando che il numero di tali intervalli è $\frac{N}{H} + O(1)$, che almeno $\frac{N}{2H} + O(1)$ di essi non contengono primi e ponendo

$$E = \{Y : 1 \le Y \le N \text{ t.c. } [Y, Y + \frac{H}{4}] \text{ non contiene primi}\}\ ,$$

otteniamo

$$m(E) \gg N\ .$$

Segue che

$$J(N, \frac{H}{8}) \ge \int_E \left(\psi(x + \frac{H}{8}) - \psi(x) - \frac{H}{8}\right)^2 dx = \int_E \frac{H^2}{64} dx \gg H^2 N.$$

Ma, sotto RH, vale la stima

$$J(N, \frac{H}{8}) \ll HNL^2$$

che, combinata con la precedente, fornisce $H^2N \ll HNL^2$, e quindi

$$H \ll L^2. \quad \square$$

2.2. La variante di Goldston.

La variante di Goldston [**Gol90**] basata sul metodo del cerchio utilizza ancora il risultato di Selberg (4.1) per stimare, via il Lemma di Gallagher, la quantità

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha) - T(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Il risultato principale di Goldston è

Teorema 4.2.2.1 (Goldston). *Sia $1 \le H \le \frac{N}{L^3}$. Si ha per N sufficientemente grande che*

$$\Big| \sum_{n=-H}^{H} (H - |n|)\, R(N+n) - H^2N \Big| \le J(N,H) + O(HN) + o(H^2N).$$

Dal Teorema 4.2.2.1 si deducono i seguenti

Corollario 4.2.2.2 *Assumiamo RH. Esiste $C > 0$ tale che, per N sufficientemente grande, l'intervallo $[N, N + CL^2]$ contiene almeno un G-numero.*

Corollario 4.2.2.3 *Supponiamo che $J(N,H) = o(H^2N)$. Allora*

$$\sum_{n=N}^{N+H} r(n) \sim H \frac{N}{\log^2 N} \qquad \text{per } N \to \infty\ . \tag{4.2}$$

Corollario 4.2.2.4 *Supponiamo che $J(N,H) = o(H^2N)$ e $H \gg L^2$. Allora*

$$\sum_{\substack{N \le n \le N+H \\ r(n) \ge 1}} 1 \gg H.$$

Prima di dimostrare il Teorema 4.2.1.1, definiamo

$$R(N,n) = \sum_{\substack{h+k=n \\ h,k \le N}} \Lambda(h)\Lambda(k)$$

e

$$r(N,n) = \sum_{\substack{h+k=n \\ h,k \le N}} 1$$

e osserviamo che la relazione fondamentale del metodo del cerchio fornisce

$$R(N,n)=\int_0^1 S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha=\int_{-\xi}^{\xi} S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha+\int_{\xi}^{1-\xi} S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha. \tag{4.3}$$

Valutiamo il primo termine di (4.3).

Lemma 4.2.2.5 *Siano $N\geq 1$, $\frac{1}{N}\leq\xi\leq\frac{1}{2}$ e $n\in[0,2N]$. Allora*

$$\int_{-\xi}^{\xi} S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha=\min(n-1,2N-n+1)+O\left(\xi^2 J(N,\frac{1}{2\xi})\right) \tag{4.4}$$

$$+O\left(N^{1/2}\xi\sqrt{J(N,\frac{1}{2\xi})}\right)+O\left(\sqrt{\frac{N}{\xi}}\right)$$

e

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)|^2 e(-n\alpha)d\alpha=\max(N-n,0)+O\left(\xi^2 J(N,\frac{1}{2\xi})\right) \tag{4.5}$$

$$+O\left(N^{1/2}\xi\sqrt{J(N,\frac{1}{2\xi})}\right)+O\left(\sqrt{\frac{N}{\xi}}\right).$$

Dim.
Sia $T(\alpha)=\sum_{k=1}^{N} e(k\alpha)$. Allora

$$\int_{-\xi}^{\xi} S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha=\int_{-\xi}^{\xi}\left[T(\alpha)+(S(\alpha)-T(\alpha))\right]^2 e(-n\alpha)d\alpha$$

$$=\int_{-\xi}^{\xi} T^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha+O\left(\int_{-\xi}^{\xi}|T(\alpha)||S(\alpha)-T(\alpha)|d\alpha\right)$$

$$+O\left(\int_{-\xi}^{\xi}|S(\alpha)-T(\alpha)|^2 d\alpha\right). \tag{4.6}$$

Poichè $T(\alpha)\ll\min(N,\frac{1}{\alpha})$, abbiamo $T(\alpha)\ll\frac{1}{\alpha}$ se $\alpha\in[-\xi,\xi]$ in quanto $\xi>\frac{1}{N}$, quindi

$$\int_{-\xi}^{\xi} T^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha+O\left(\int_{\xi}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha^2}\right) \tag{4.7}$$

$$= \sum_{\substack{1\le k,k'\le N\\ k+k'=n}} 1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right) = \min(n-1, 2N-n+1) + O\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Stimiamo il terzo termine di (4.6) utilizzando il Lemma di Gallagher:

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)-T(\alpha)|^2 d\alpha \ll \xi^2 \int_{1-\frac{1}{2\xi}}^{1} (\psi(x+\frac{1}{2\xi}) - (x+\frac{1}{2\xi}-1))^2 dx$$

$$+\xi^2 \int_{1}^{N-\frac{1}{2\xi}} (\psi(x+\frac{1}{2\xi}) - \psi(x) - \frac{1}{2\xi})^2 dx + \xi^2 \int_{N-\frac{1}{2\xi}}^{N} \left(\psi(N)-\psi(x)-(N-x)\right)^2 dx$$

$$= \xi^2 \int_{1-\frac{1}{2\xi}}^{1} (\psi(x+\frac{1}{2\xi}) - (x+\frac{1}{2\xi}) + O(1))^2 dx + \xi^2 \int_{1}^{N} (\psi(x+\frac{1}{2\xi}) - \psi(x) - \frac{1}{2\xi})^2 dx$$

$$-\xi^2 \int_{N-\frac{1}{2\xi}}^{N} (\psi(x+\frac{1}{2\xi}) - \psi(x) - \frac{1}{2\xi})^2 dx + \xi^2 \int_{N-\frac{1}{2\xi}}^{N} \left(\psi(N)-\psi(x)-(N-x)\right)^2 dx$$

e quindi, per $\psi(x) \ll x$, $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ e la disuguaglianza di Brun-Titchmarsh, otteniamo

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)-T(\alpha)|^2 d\alpha \ll \frac{1}{\xi} + \xi^2 J(N, \frac{1}{2\xi}). \tag{4.8}$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e sfruttando (4.7) e (4.8) si ottiene la seguente stima per il secondo termine di (4.6)

$$\int_{-\xi}^{\xi} |T(\alpha)||S(\alpha)-T(\alpha)| d\alpha \ll N^{1/2}\xi\sqrt{J(N,\frac{1}{2\xi})} + \sqrt{\frac{N}{\xi}}. \tag{4.9}$$

Allora (4.4) segue da (4.6) , (4.7) , (4.8) , (4.9).

Per ottenere (4.5) basta osservare che

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T(\alpha)|^2 e(-n\alpha) d\alpha = \sum_{\substack{1\le k,k'\le N\\ k-k'=n}} 1 = \max(N-n, 0). \quad \square$$

Osservazioni.

a) Si può notare che per $0 < \xi < \frac{1}{N}$ si ha, per il teorema dei numeri primi, che

$$\left|\int_{-\xi}^{\xi} S(\alpha)^2 e(-n\alpha) d\alpha\right| \le 2\xi\,|S(0)|^2 \ll N^2\xi = O(\sqrt{\frac{N}{\xi}})$$

e quindi in realtà il Lemma 4.2.2.5 vale per $0 < \xi < \frac{1}{2}$.
b) la trattazione precedente del Lemma 4.2.2.5 corregge alcuni errori presenti nel lavoro originale di Goldston.

Passiamo alla dimostrazione del Teorema 4.2.2.1.

Ponendo $L(\alpha) = \sum\limits_{n=-H}^{H} (H-|n|)e(-n\alpha) = \left(\dfrac{\sin \pi H\alpha}{\sin \pi\alpha}\right)^2$ si ha

$$\sum_{n=-H}^{H} (H-|n|)R(N,N+n) = \int_{-\xi}^{\xi} S(\alpha)^2 L(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$$

$$+ \int_{\xi}^{1-\xi} S(\alpha)^2 L(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha. \tag{4.10}$$

Abbiamo

$$\Big|\int_{\xi}^{1-\xi} S(\alpha)^2 L(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha\Big| \leq \int_{\xi}^{1-\xi} |S(\alpha)|^2|L(\alpha)|d\alpha$$

$$= \int_{0}^{1} |S(\alpha)|^2|L(\alpha)|d\alpha - \int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)|^2|L(\alpha)|d\alpha$$

$$= H\sum_{n=1}^{N} \Lambda^2(n) + 2\sum_{n=1}^{H}(H-n)Z(N,n) - \int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)|^2|L(\alpha)|d\alpha$$

dove $Z(N,n) = \sum\limits_{\substack{h,k\leq N\\ h-k=n}} \Lambda(h)\Lambda(k)$.

Per valutare il primo termine nella (4.10) si osserva che, se $H = o(N)$ e $\xi = N^{-1/3}$, abbiamo $n = N + o(N)$ e, poichè $J(N,H) = o(H^2N)$ per $H \geq N^{1/6+\varepsilon}$,

$$J(N, \frac{1}{2\xi}) = o(\frac{N}{\xi^2}).$$

Quindi, dal Lemma 4.2.2.5 otteniamo

$$\int_{-\xi}^{\xi} S(\alpha)^2 e(-n\alpha)d\alpha \sim N \quad \text{e} \quad \int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)|^2 e(-n\alpha)d\alpha \sim N.$$

Applicando il teorema dei numeri primi abbiamo allora

$$\Big|\sum_{n=-H}^{H} (H-|n|)\, R(N,N+n) - H^2N\Big| \leq HNL + 2\sum_{n=1}^{H}(H-n)Z(N,n) - H^2N$$

$$+O(HN) + o(H^2N).$$

Per ottenere la tesi basta osservare che, per $H < \frac{N}{L^3}$, si ha

$$
\begin{aligned}
J(N,H) &= \int_1^N (\psi(x+H)-\psi(x))^2\,dx - 2H\int_1^N (\psi(x+H)-\psi(x))\,dx + H^2(N-1)\\
&= \int_1^N \Big(\sum_{x<n\le x+H}\Lambda(n)\Big)^2 dx - 2H^2N + H^2N + O(H^3L) + o(H^2N)\\
&= H\sum_{n\le N}\Lambda^2(n) + 2\sum_{\substack{n,m\le N\\ 0<n-m\le H}}\Lambda(n)\Lambda(m)(H-(n-m)) - H^2N + O(H^3L) + o(H^2N)\\
&= HN\log N + 2\sum_{n=1}^{H}(H-n)Z(N,n) - H^2N + O(HN) + o(H^2N).
\end{aligned}
$$

Il teorema segue osservando che $R(N,N+n) = R(N+n) + O(n\log^2 n)$. □

Dimostriamo il Corollario 4.2.2.2.
Dalla (4.1) e dal Teorema 4.2.2.1 abbiamo che

$$\Big|\sum_{n=-H}^{H}(H-|n|)\,R(N,N+n) - H^2N\Big| \ll HNL^2 + o(H^2N),$$

quindi

$$\sum_{n=-H}^{H}(H-|n|)\,R(N,N+n) = H^2N + O(HNL^2) + o(H^2N).$$

Posto allora $H = CL^2$, dove $C > 0$ è una costante sufficientemente grande, otteniamo

$$\sum_{n=-H}^{H}(H-|n|)\,R(N,N+n) \gg H^2N \tag{4.11}$$

da cui il Corollario 4.2.2.2. □

Per la dimostrazione del Corollario 4.2.2.3 supponiamo $J(N,H) = o(H^2N)$. Il Teorema 4.2.2.1 fornisce allora

$$\sum_{n=-H}^{H}(H-|n|)\,R(N,N+n) \sim H^2N \qquad \text{per } N\to\infty\ .$$

Poniamo $S(H) = \sum\limits_{n=-H}^{H}(H-|n|)\,R(N,N+n)$. Per $1\le h\le H$ abbiamo che

$$\frac{S(H)-S(H-h)}{h} \le \sum_{n=-H}^{H} R(N,N+n) \le \frac{S(H+h)-S(H)}{h}$$

e quindi

$$\left|\sum_{n=-H}^{H} R(N, N+n) - 2HN\right| < HN + o(H^2N/h).$$

Ponendo $h = f(H)H$, con $f(H) \to 0$ in modo sufficientemente lento per $h \to \infty$, si ha

$$\sum_{n=-H}^{H} R(N, N+n) \sim 2HN \quad \text{per } N \to \infty. \tag{4.12}$$

A causa del Teorema 4.2.2.1 la relazione precedente vale soggetta alla limitazione $H \leq \frac{N}{L^3}$. In tale intervallo si ha $R(N+n) \sim L^2 r(N+n)$, da cui il Corollario per $H \leq \frac{N}{L^3}$.
Supponiamo ora $H > \frac{N}{L^3}$. Per ottenere il Corollario anche in questo intervallo basta suddividere $[1, H]$ in $O(HL^3/N)$ sottointervalli in cui vale (4.12) e sommare. $\square$

Passiamo infine alla dimostrazione del Corollario 4.2.2.4.
Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo

$$\sum_{\substack{n=N-H\\ R(n)\geq 1}}^{N+H} 1 \geq \frac{\left(\sum\limits_{n=N-H}^{N+H} a(n-N)R(n)\right)^2}{\sum\limits_{n=N-H}^{N+H} \left(a(n-N)R(n)\right)^2},$$

dove $a(m) = H - |m|$. La disuguaglianza di crivello (vedi [**HR74**], Theorem 3.11) fornisce

$$R(n) \ll \mathfrak{S}(n)n$$

e quindi, poichè $a(n-N) \ll H$ per $n \in [n-H, n+H]$, abbiamo

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} \left(a(n-N)R(n)\right)^2 \ll H^2 \sum_{n=N-H}^{N+H} n^2\mathfrak{S}^2(n).$$

Usiamo il seguente risultato di carattere elementare (vedi Goldston [**Gol90**], Lemma 2)

Lemma. *Sia $N \to \infty$. Allora*

$$\sum_{n\leq N} \mathfrak{S}^2(n) = 2N \prod_{p\geq 3}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) + O(L^2).$$

Abbiamo allora che

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} \mathfrak{S}^2(n) \ll H + O(L^2)$$

e quindi, per sommazione parziale,

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} n^2\mathfrak{S}^2(n) \ll HN^2$$

e

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} \left(a(n-N)R(n)\right)^2 \ll H^3N^2.$$

La (4.11) fornisce, per $H \gg \log^2 N$,

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N)R(n) \gg H^2 N \ ,$$

e quindi

$$\sum_{\substack{n=N-H \\ R(n)\geq 1}}^{N+H} 1 \gg \frac{H^4 N^2}{H^3 N^2} = H$$

per $H \gg L^2$, ossia la tesi.

2.3. Sviluppi del metodo di Linnik.

Come abbiamo già detto nell'introduzione al capitolo 4, Linnik usò il metodo del cerchio nella dimostrazione del suo risultato, mentre Kátai e Montgomery-Vaughan utilizzarono la connessione tra i G-numeri ed i primi in intervalli corti. Infatti abbiamo visto nel paragrafo 4.1 che il risultato di Kátai e Montgomery-Vaughan segue facilmente dalla stima (4.1) di Selberg [**Sel43**], sotto RH. Osserviamo che la stima leggermente più debole, sempre sotto RH,

$$J(N, H) \ll NHL^3 \tag{4.13}$$

si otteniene in maniera diretta usando la formula esplicita per $\psi(x)$. La (4.13) corrisponde, in un certo senso, al risultato di Linnik. Il metodo di Saffari-Vaughan nella dimostrazione di (4.1) è basato su una preliminare ingegnosa tecnica di media che rende più efficiente l'uso della formula esplicita.
Scopo principale del lavoro di Languasco-Perelli [**LP94**] è stato quello di mostrare che una modifica dell'approccio originale di Linnik permette di riottenere il risultato di Kátai e Montgomery-Vaughan senza utilizzare la stima in (4.1). Ciò è stato ottenuto inserendo la tecnica di Saffari-Vaughan nel metodo del cerchio ed evitando l'uso dell'identità di Parseval in una parte critica dell'intervallo unitario.
Gli argomenti sono stati formulati in termini della somma esponenziale infinita

$$\widetilde{S}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-n/N} e(n\alpha) \ ,$$

come fece Linnik stesso. Tuttavia, si possono ottenere risultati completamente analoghi mediante l'uso della somma esponenziale finita

$$S(\alpha) = \sum_{n\leq N} \Lambda(n) e(n\alpha) \ .$$

Le modifiche necessarie per usare $S(\alpha)$ al posto di $\widetilde{S}(\alpha)$ si basano sulla formula esplicita per $\psi(x)$.

Teorema 4.2.3.1. *Assumiamo RH e poniamo* $z = \frac{1}{N} - 2\pi i\alpha$. *Per* N *sufficientemente grande e* $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$ *abbiamo*

$$\int_{-\xi}^{\xi} \left| \widetilde{S}(\alpha)^2 - \frac{1}{z^2} \right| d\alpha \ll N\xi L^2 + N\xi^{1/2} L \ .$$

Osserviamo che la stima nel Teorema 4.2.3.1 sembra essere in contrasto con l'affermazione di Goldston nel par. 4 di [**Gol90**]. Infatti, la perdita di un fattore L nel lavoro di Linnik è dovuta al fatto che non viene introdotta la tecnica di Saffari-Vaughan nell'utilizzo della formula esplicita di $\widetilde{S}(\alpha)$, e non al fatto che $\widetilde{S}(\alpha)$ è una somma non troncata ad N. La perdita di cui sopra corrisponde alla perdita di un fattore L nella (4.13), confrontata con (4.1).
Dal Teorema 4.2.3.1 deduciamo il seguente

Corollario 4.2.3.1. *Assumiamo RH. Allora esiste una costante* $C > 0$ *tale che, per* $N \ge 2$, *l'intervallo* $[N, N + CL^2]$ *contiene un G-numero.*

Essenzialmente, il metodo che esporremo può essere utilizzato per ottenere G-numeri in intervalli del tipo $[N, N + H]$ per quegli H per cui vale una stima della forma

$$\int_{-\frac{1}{H}}^{\frac{1}{H}} \left| \widetilde{S}(\alpha)^2 - \frac{1}{z^2} \right| \ d\alpha \le cN \ ,$$

dove $c > 0$ è un'opportuna costante. Una semplice conseguenza del Teorema 4.2.3.1 è il seguente

Corollario 4.2.3.2. *Assumiamo RH. Allora per* N *sufficientemente grande e* $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$ *abbiamo*

$$\int_{-\xi}^{\xi} \left| \widetilde{S}(\alpha) \right|^2 d\alpha = \frac{N}{\pi} \arctan 2\pi N\xi + O(N\xi L^2) + O(N\xi^{1/2} L) \ .$$

Il Corollario 4.2.3.2 va confrontato con il risultato ottenuto attraverso l'identità di Parseval, cioè

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \widetilde{S}(\alpha) \right|^2 d\alpha \sim \frac{NL}{2} \ . \tag{4.14}$$

Quindi il Corollario 4.2.3.2 può essere visto come una versione condizionale troncata di (4.14). Tuttavia si può osservare che ponendo $\xi = \frac{1}{2}$ nel Corollario 4.2.3.2 si ottiene soltanto il risultato più debole

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \widetilde{S}(\alpha) \right|^2 d\alpha \ll NL^2 \ .$$

Nel 1959, Lavrik [**Lav59**] provò che

$$\int_a^b \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha = \frac{b-a}{2} NL + O(N \log^2 L)$$

se $0 \le b-a \le 1$. Un risultato incondizionale riguardante troncamenti dell'identità di Parseval, che migliora il risultato di Lavrik, è il seguente

Teorema 4.2.3.2. *Sia $0 \le b-a \le 1$ e sia N sufficientemente grande. Allora*

$$\int_a^b \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha = \frac{b-a}{2} NL + O(N(L(b-a))^{1/3}) + O(N)\ .$$

Osserviamo che il Teorema 4.2.3.2 è sostanzialmente ottimale, nel senso che non si può rimpiazzare il termine $O(N)$ con $o(N)$.
Un'applicazione del Teorema 4.2.3.2 può portare, in opportune circostanze, a migliorare quei risultati che coinvolgono l'uso dell'identità di Parseval. Per esempio, l'utilizzo del Teorema 4.2.3.2 anziché dell'identità di Parseval nelle argomentazioni originali di Linnik permette di eliminare la quantità ε dal risultato di Linnik. Ciò va confrontato con i commenti di Goldston sul polinomio di Fourier $V(\alpha)$ nel par. 4 di [**Gol90**]. Allo stesso modo, il Teorema 4.2.3.2 può rimpiazzare l'integrazione per parti nella dimostrazione del Corollario 4.2.3.1.
Osserviamo infine che il Teorema 4.2.3.2 permette di ricavare l'ordine di grandezza di $\int_{-\xi}^{\xi} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha$ in tutto l'intervallo $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$. Abbiamo allora

Corollario 4.2.3.3. *Sia N sufficientemente grande. Allora*

$$\int_{-\xi}^{\xi} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha \asymp \begin{cases} N^2\xi & \text{se } 0 \le \xi \le \frac{1}{N} \\ N & \text{se } \frac{1}{N} \le \xi \le \frac{1}{L} \\ N\xi L & \text{se } \frac{1}{L} \le \xi \le \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Il Corollario 4.2.3.3 può essere visto come una versione troncata dell'identità di Parseval.

Per la dimostrazione del Teorema 4.2.3.1 utilizziamo la seguente formula esplicita:

$$\widetilde{S}(\alpha) = \frac{1}{z} - \sum_{\rho} z^{-\rho}\Gamma(\rho) + O(L^3)$$

dove $z = \frac{1}{N} - 2\pi i\alpha$ e $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ varia sugli zeri non banali di $\zeta(s)$ (vedi [**Lin52**]). Abbiamo

$$\widetilde{S}(\alpha)^2 - \frac{1}{z^2} \ll \left|\sum_{\rho} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|^2 + \left|\frac{1}{z}\sum_{\rho} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\right| +$$

$$+ L^3 \left|\sum_{\rho} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\right| + L^3 \left|\frac{1}{z}\right| + L^6 = \widetilde{R}_1 + \cdots + \widetilde{R}_5\ . \tag{4.15}$$

Poichè

$$\frac{1}{z} \ll \min\left(N, \frac{1}{\alpha}\right)$$

otteniamo

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_5 d\alpha \ll \xi L^6 \ , \tag{4.16}$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_4 d\alpha \ll N^{1/2}\xi^{1/2} L^3 \ , \tag{4.17}$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_3 d\alpha \ll \xi^{1/2} L^3 \left(\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_1 d\alpha\right)^{1/2} \tag{4.18}$$

e

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_2 d\alpha \ll N^{1/2} \left(\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_1 d\alpha\right)^{1/2} \ . \tag{4.19}$$

Poichè $z^{-\rho} = |z|^{-\rho} \exp\left(-i\rho \arctan 2\pi N\alpha\right)$, dalla formula di Stirling abbiamo che

$$\sum_{\rho} z^{-\rho}\Gamma(\rho) \ll \sum_{\rho} |z|^{-1/2} \exp\left(\gamma \arctan 2\pi N\alpha - \frac{\pi}{2}|\gamma|\right) \ .$$

Se $\gamma\alpha \leq 0$ oppure $|\alpha| \leq \frac{1}{N}$, otteniamo

$$\sum_{\rho} z^{-\rho}\Gamma(\rho) \ll N^{1/2} \ ,$$

dove, nel primo caso, ρ varia sugli zeri non banali di $\zeta(s)$, per cui $\gamma\alpha \leq 0$.

Quindi, se $0 \leq \xi \leq \frac{1}{N}$,

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_1 d\alpha \ll N\xi \tag{4.20}$$

mentre se $\xi > \frac{1}{N}$

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_1 d\alpha \ll \int_{1/N}^{\xi} \Big|\sum_{\gamma>0} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\Big|^2 d\alpha + \int_{-\xi}^{-1/N} \Big|\sum_{\gamma<0} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\Big|^2 d\alpha + N\xi \ . \tag{4.21}$$

Considereremo soltanto il primo integrale al secondo membro della (4.21), essendo il secondo integrale totalmente analogo.

Chiaramente

$$\int_{1/N}^{\xi} \Big|\sum_{\gamma>0} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\Big|^2 d\alpha = \sum_{k=1}^{K} \int_{\eta}^{2\eta} \Big|\sum_{\gamma>0} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\Big|^2 d\alpha + O(1) \tag{4.22}$$

dove $\eta = \eta_k = \frac{\xi}{2^k}$, $\frac{1}{N} \leq \eta \leq \frac{\xi}{2}$ e K è un intero opportuno che soddisfa $K = O(L)$. Scrivendo $\arctan 2\pi N\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2\pi N\alpha}$ ed utilizzando la tecnica di Saffari-Vaughan otteniamo

$$\int_{\eta}^{2\eta} \Big|\sum_{\gamma>0} z^{-\rho}\,\Gamma(\rho)\Big|^2 \,d\alpha \leq \int_{1}^{2} \left(\int_{\frac{\delta\eta}{2}}^{2\delta\eta} \Big|\sum_{\gamma>0} z^{-\rho}\,\Gamma(\rho)\Big|^2 d\alpha \right) d\delta$$

$$= \sum_{\gamma_1>0} \sum_{\gamma_2>0} \Gamma(\rho_1)\,\overline{\Gamma(\rho_2)}\; e^{\frac{\pi}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}\; J \tag{4.23}$$

dove

$$J = J(N,\eta,\gamma_1,\gamma_2) = \int_{1}^{2} \left(\int_{\frac{\delta\eta}{2}}^{2\delta\eta} f_1(\alpha) f_2(\alpha)\; d\alpha \right) \; d\delta \;,$$

con

$$f_1(\alpha) = |z|^{-1-i(\gamma_1-\gamma_2)} \quad \text{e} \quad f_2(\alpha) = \exp\left(-(\gamma_1+\gamma_2)\arctan \frac{1}{2\pi N\alpha} \right) \;.$$

Procediamo ora a stimare J. Integrando due volte per parti ed indicando con F_1 una primitiva di f_1 e con G_1 una primitiva di F_1, otteniamo

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{1}{2\eta}\left(G_1(4\eta)f_2(4\eta) - G_1(2\eta)f_2(2\eta)\right) \\ & -\frac{2}{\eta}\left(G_1(\eta)f_2(\eta) - G_1\left(\frac{\eta}{2}\right)\, f_2\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) \\ & -2\int_{1}^{2} G_1(2\delta\eta)\, f_2'(2\delta\eta) d\delta + 2\int_{1}^{2} G_1\left(\frac{\delta\eta}{2}\right)\, f_2'\left(\frac{\delta\eta}{2}\right)\, d\delta \\ & + \int_{1}^{2}\left(\int_{\frac{\delta\eta}{2}}^{2\delta\eta} G_1(\alpha) f_2''(\alpha) d\alpha \right)\, d\delta \;. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Se $\alpha > \frac{1}{N}$ abbiamo

$$f_2'(\alpha) \ll \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\alpha}\right) f_2(\alpha)$$

$$f_2''(\alpha) \ll \frac{1}{\alpha^2}\left\{ \left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\alpha}\right) + \left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\alpha}\right)^2 \right\} f_2(\alpha) \;,$$

perciò dalla (4.24) otteniamo

$$J \ll \frac{1}{\eta} \max_{\alpha \in [\frac{\eta}{2}, 4\eta]} |G_1(\alpha)| \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{N\eta} \right)^2 \right\} \exp\left(-c \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{N\eta} \right) \right) , \tag{4.25}$$

dove $c > 0$ è un'opportuna costante.
Al fine di stimare $G_1(\alpha)$ utilizziamo la sostituzione

$$u = u(\alpha) = \left(\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\alpha^2 \right)^{1/2} , \tag{4.26}$$

ricavando quindi

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int u^{-i(\gamma_1 - \gamma_2)} \frac{du}{(u^2 - \frac{1}{N^2})^{1/2}} .$$

Integrando per parti si ha

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi(1 - i(\gamma_1 - \gamma_2))} \left\{ \frac{u^{1-i(\gamma_1-\gamma_2)}}{\left(u^2 - \frac{1}{N^2}\right)^{1/2}} + \int u^{1-i(\gamma_1-\gamma_2)} \frac{u \, du}{(u^2 - \frac{1}{N^2})^{3/2}} \right\} . \tag{4.27}$$

Dalla (4.26) e dalla (4.27) abbiamo

$$G_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi(1 - i(\gamma_1 - \gamma_2))} \left\{ A(\alpha) + \int B(\alpha) d\alpha \right\} , \tag{4.28}$$

dove

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{u^{2-i(\gamma_1-\gamma_2)}}{u^2 - \frac{1}{N^2}} \, du$$

e

$$B(\alpha) = \int \frac{u^{2-i(\gamma_1-\gamma_2)}}{(u^2 - \frac{1}{N^2})^{3/2}} \, du .$$

Procedendo nuovamente con un'integrazione per parti, otteniamo

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi(3 - i(\gamma_1 - \gamma_2))} \left\{ \frac{u^{3-i(\gamma_1-\gamma_2)}}{u^2 - \frac{1}{N^2}} + 2 \int u^{4-i(\gamma_1-\gamma_2)} \frac{du}{(u^2 - \frac{1}{N^2})^2} \right\}$$

e

$$B(\alpha) = \frac{1}{3 - i(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \frac{u^{3-i(\gamma_1-\gamma_2)}}{(u^2 - \frac{1}{N^2})^{3/2}} + 3 \int u^{4-i(\gamma_1-\gamma_2)} \frac{du}{(u^2 - \frac{1}{N^2})^{5/2}} \right\} .$$

Quindi per la (4.26), se $\alpha \in [\frac{\eta}{2}, 4\eta]$ abbiamo

$$A(\alpha) \ll \frac{u}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \ll \frac{\alpha}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|}, \tag{4.29}$$

$$B(\alpha) \ll \frac{1}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} , \tag{4.30}$$

dove $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ soddisfano $A(\frac{\eta}{4}) = B(\frac{\eta}{4}) = 0$, e dalle relazioni (4.28) - (4.30) otteniamo

$$G_1(\alpha) \ll \frac{\alpha}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|^2} \tag{4.31}$$

per $\alpha \in [\frac{\eta}{2}, 4\eta]$.
Dalla (4.25) e dalla (4.31) abbiamo

$$J \ll \frac{1 + \left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\eta}\right)^2}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|^2} \exp\left(-c\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\eta}\right)\right) ,$$

perciò dalla (4.23) ed dalla formula di Stirling abbiamo

$$\int_{\eta}^{2\eta} \Big| \sum_{\gamma>0} z^{-\rho}\Gamma(\rho)\Big|^2 d\alpha \ll \sum_{\gamma_1>0}\sum_{\gamma_2>0} \frac{1 + \left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\eta}\right)^2}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|^2} \exp\left(-c\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\eta}\right)\right) . \tag{4.32}$$

Poichè

$$\left\{1 + \left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\eta}\right)^2\right\} \exp\left(-c\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{N\eta}\right)\right) \ll \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{\gamma_1}{N\eta}\right) ,$$

la (4.32) diventa

$$\ll \sum_{\gamma_1>0} \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{\gamma_1}{N\eta}\right) \sum_{\gamma_2>0} \frac{1}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|^2} \ll N\eta L^2 , \tag{4.33}$$

in quanto il numero degli zeri $\rho_2 = \frac{1}{2} + i\gamma_2$ con $n \leq |\gamma_1 - \gamma_2| \leq n+1$ è $O(\log(n + |\gamma_1|))$.
Dalle relazioni (4.20)-(4.22) e da (4.33) ricaviamo

$$\int_{-\xi}^{\xi} \widetilde{R}_1 d\alpha \ll N\xi L^2 , \tag{4.34}$$

e quindi il Teorema 4.2.3.1 segue da (4.15)-(4.19) e da (4.34).

Dimostriamo il Corollario 4.2.3.1.
Supponiamo che $H, N \in \mathbb{N}$, $H < N$, e definiamo

$$L(\alpha) = \Big| \sum_{m=1}^{H} e(-m\alpha)\Big|^2 = \sum_{m=-H}^{H} a(m)e(-m\alpha) ,$$

dove $a(m) = H - |m|$,

$$R(n) = \sum_{h+k=n} \Lambda(h)\Lambda(k) \quad \text{e} \quad \widetilde{R}(\alpha) = \widetilde{S}(\alpha)^2 - \frac{1}{z^2} ,$$

con $z = \frac{1}{N} - 2\pi i\alpha$. Abbiamo allora che

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N)e^{-n/N}R(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{S}(\alpha)^2 L(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{L(\alpha)}{z^2} e(-N\alpha) d\alpha + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{R}(\alpha) L(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha = I_1 + I_2 \ , \tag{4.35}$$

Calcoliamo I_1 usando il teorema dei residui. Abbiamo

$$I_1 = \sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e(-n\alpha)}{z^2} d\alpha. \tag{4.36}$$

Se $T \geq \frac{1}{2}$ allora

$$\left(\int_{-T}^{-\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{T} \right) \frac{d\alpha}{|z|^2} \ll \int_{\frac{1}{2}}^{T} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \ll 1 \ ,$$

perciò

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e(-n\alpha)}{z^2} d\alpha = \int_{-T}^{T} \frac{e(-n\alpha)}{z^2} d\alpha + O(1) \tag{4.37}$$

uniformemente per $T \geq \frac{1}{2}$. Però

$$\int_{-T}^{T} \frac{e(-n\alpha)}{z^2} \, d\alpha = \frac{e^{-n/N}}{2\pi i} \int_{\frac{1}{N}-2\pi i T}^{\frac{1}{N}+2\pi i T} \frac{\exp(ns)}{s^2} \, ds. \tag{4.38}$$

Indichiamo con Γ la metà sinistra della circonferenza $\left| s - \frac{1}{N} \right| = 2\pi T$. Dal teorema dei residui si ha

$$\frac{e^{-n/N}}{2\pi i} \int_{\frac{1}{N}-2\pi i T}^{\frac{1}{N}+2\pi i T} \frac{\exp(ns)}{s^2} \, ds = n e^{-n/N} + \frac{e^{-n/N}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp(ns)}{s^2} \, ds$$

$$= n e^{-n/N} + O\left(\frac{1}{T} \right) \ . \tag{4.39}$$

Facendo tendere $T \to \infty$, dalle relazioni (4.37)-(4.39) otteniamo

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e(-n\alpha)}{z^2} d\alpha = n e^{-n/N} + O(1) \tag{4.40}$$

uniformemente per $n \leq 2N$. Perciò dalla (4.36) e dalla (4.40) otteniamo

$$I_1 = \sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N) n e^{-n/N} + O(H^2)$$

$$= \frac{N}{e} \sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N) + O(H^3) = \frac{H^2 N}{e} + O(H^3) \ . \tag{4.41}$$

Abbiamo

$$I_2 \ll \int_{-\frac{1}{H}}^{\frac{1}{H}} |\widetilde{R}(\alpha)| L(\alpha) d\alpha + \int_{\frac{1}{H}}^{\frac{1}{2}} |\widetilde{R}(\alpha)| L(\alpha) d\alpha \ . \tag{4.42}$$

Poichè

$$L(\alpha) \ll \min\left(H^2, \frac{1}{|\alpha|^2}\right) \ , \tag{4.43}$$

dal Teorema 4.2.3.1 ricaviamo

$$\int_{-\frac{1}{H}}^{\frac{1}{H}} |\widetilde{R}(\alpha)| L(\alpha) d\alpha \ll HNL^2 + H^{3/2} NL \ . \tag{4.44}$$

Dalla (4.43) abbiamo

$$\int_{\frac{1}{H}}^{\frac{1}{2}} |\widetilde{R}(\alpha)| L(\alpha) d\alpha \ll \int_{\frac{1}{H}}^{\frac{1}{2}} |\widetilde{R}(\alpha)| \frac{d\alpha}{\alpha^2} \ , \tag{4.45}$$

e mediante integrazione per parti dal Teorema 4.2.3.1 otteniamo

$$\int_{\frac{1}{H}}^{\frac{1}{2}} |\widetilde{R}(\alpha)| \frac{d\alpha}{\alpha^2} \ll HNL^2 + H^{3/2} NL \ . \tag{4.46}$$

Allora da (4.42) e da (4.44)-(4.46) si ha

$$I_2 \ll HNL^2 + H^{3/2} NL \ , \tag{4.47}$$

e da (4.35), (4.41) e (4.47) otteniamo infine

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N) e^{-n/N} R(n) = \frac{H^2 N}{e} + O\left(H^3 + HNL^2 + H^{3/2} NL\right) \ . \tag{4.48}$$

Scegliendo $H = CL^2$, $C > 0$ sufficientemente grande, dalla (4.48) abbiamo infine

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N) e^{-n/N} R(n) \gg H^2 N,$$

da cui segue il Corollario 4.2.3.1.

Allo scopo di provare il Corollario 4.2.3.2 osserviamo che dalla (4.15) si ha

$$\left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 = \frac{1}{|z|^2} + O\left(\widetilde{R}_1 + \cdots + \widetilde{R}_5\right) \ ,$$

ed inoltre

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{d\alpha}{|z|^2} = \frac{N}{\pi} \arctan 2\pi N\xi \ .$$

Il Corollario 4.2.3.2 segue allora da (4.16)-(4.19) e da (4.34).

Per la dimostrazione del Teorema 4.2.3.2 richiamiamo le proprietà della funzione ausiliaria di Vinogradov (vedi [**Vin85**], p.196). Sia r un intero non negativo e siano μ, η, Δ tali che

$$0 < \Delta < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \Delta \le \eta - \mu \le 1 - \Delta \ . \tag{4.49}$$

Esiste allora una funzione $\Psi(\alpha) = \Psi_{\mu,\eta,\Delta}(\alpha)$ periodica di periodo 1, tale che

i) $\Psi(\alpha) = 1$ se $\mu + \frac{\Delta}{2} \le \alpha \le \eta - \frac{\Delta}{2}$

ii) $0 < \Psi(\alpha) < 1$ se $\mu - \frac{\Delta}{2} < \alpha < \mu + \frac{\Delta}{2}$, $\eta - \frac{\Delta}{2} < \alpha < \eta + \frac{\Delta}{2}$

iii) $\Psi(\alpha) = 0$ se $\eta + \frac{\Delta}{2} < \alpha < 1 + \mu - \frac{\Delta}{2}$

iv) $\Psi(\alpha) = \eta - \mu + \sum\limits_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} a(m)e(m\alpha)$, dove

$$|a(m)| \le \min\left(\eta - \mu, \frac{1}{\pi m}\left(\frac{r+1}{\pi m\Delta}\right)^r\right) \ . \tag{4.50}$$

Definiamo

$$I(N,\mu,\eta,\Delta) = \int_0^1 \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 \Psi_{\mu,\eta,\Delta}(\alpha)d\alpha \ .$$

Abbiamo bisogno del seguente

Lemma. *Siano μ, η, Δ tali da soddisfare (4.49). Allora*

$$I(N,\mu,\eta,\Delta) = (\eta - \mu)\left(\frac{NL}{2} + O(N)\right) + O\left(N\left(\frac{\eta-\mu}{\Delta}\right)^{1/2}\right) \ .$$

Dim. Per quanto in iv) abbiamo

$$I(N,\mu,\eta,\Delta) = (\eta - \mu)\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^2(n)e^{-2n/N} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} a(m)\widetilde{\Psi}(N,m) \ , \tag{4.51}$$

dove

$$\widetilde{\Psi}(N,m) = \sum_{\substack{h,k=1 \\ h+k=m}}^{\infty} \Lambda(h)\Lambda(k)e^{-(h+k)/N} \ .$$

Dal teorema dei numeri primi con termine d'errore otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^2(n)e^{-2n/N} = \frac{NL}{2} + O(N) \ , \tag{4.52}$$

e dal Teorema 3.11 di [**HR74**] per sommazione parziale otteniamo

$$\widetilde{\Psi}(N,m) \ll N\mathfrak{S}(|m|) \tag{4.53}$$

uniformemente per $m \neq 0$. Perciò da (4.51)-(4.53) ricaviamo

$$I(N,\mu,\eta,\Delta) = (\eta-\mu)\left(\frac{NL}{2} + O(N)\right) + O\left(N \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} |a(m)|\mathfrak{S}(|m|)\right) . \tag{4.54}$$

Utilizziamo ora la stima

$$\sum_{n\leq x} \mathfrak{S}(n) \ll x \ , \tag{4.55}$$

vedi ad es. [**Gol90**]. Dalla (4.50) con $r = 1$ abbiamo

$$a(m) \ll \begin{cases} \eta-\mu & \text{se } |m| \leq (\Delta(\eta-\mu))^{-1/2} \\ \frac{1}{m^2\Delta} & \text{se } |m| > (\Delta(\eta-\mu))^{-1/2} \end{cases} , \tag{4.56}$$

quindi dalle (4.55) e (4.56) per sommazione parziale otteniamo

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} |a(m)|\mathfrak{S}(|m|) \ll \left(\frac{\eta-\mu}{\Delta}\right)^{1/2} , \tag{4.57}$$

ed il Lemma segue da (4.54) e da (4.57). □

Supponiamo dapprima che

$$0 < \Delta < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 0 \leq b-a \leq 1-2\Delta, \tag{4.58}$$

e scegliamo $\mu = a - \frac{\Delta}{2}$ e $\eta = b + \frac{\Delta}{2}$. La (4.49) è quindi soddisfatta ed abbiamo

$$\begin{aligned} \int_a^b \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha &= I(N,\mu,\eta,\Delta) \\ - \int_{a-\Delta}^{a} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 \Psi_{\mu,\eta,\Delta}(\alpha) d\alpha &- \int_b^{b+\Delta} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 \Psi_{\mu,\eta,\Delta}(\alpha) d\alpha \\ &= I(N,\mu,\eta,\Delta) - I_1 - I_2 \ . \end{aligned} \tag{4.59}$$

Da quanto in i) ed in ii) abbiamo

$$I_1 \leq I(N,\mu',\eta',\Delta) \tag{4.60}$$

dove $\mu' = a - \frac{3}{2}\Delta$ e $\eta' = a + \frac{\Delta}{2}$. Si verifica facilmente che μ', η', Δ soddisfano (4.49). Un'analoga maggiorazione vale anche per I_2.
Scegliendo

$$\Delta = \left(\frac{b-a}{L^2}\right)^{1/3} , \tag{4.61}$$

da (4.59), (4.60) e dal Lemma otteniamo

$$\int_a^b \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha = \frac{b-a}{2}NL + O(N(L(b-a))^{1/3}) + O(N) \ , \tag{4.62}$$

supponendo che valga (4.58).
Se

$$1 - 2\Delta < b - a \leq 1 \ , \tag{4.63}$$

allora

$$\int_a^b \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha = \int_0^1 \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha - \int_I \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha \tag{4.64}$$

con $|I| < 2\Delta$. Perciò possiamo trattare $\int_I \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha$ in modo simile a quanto fatto per I_1, ottenendo così

$$\int_I \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha \ll \Delta NL + N \ . \tag{4.65}$$

Poichè $b - a = 1 + O(\Delta)$ abbiamo

$$\int_0^1 \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha = \frac{b-a}{2}NL + O(\Delta NL) + O(N) \ , \tag{4.66}$$

perciò da (4.61) e da (4.64)-(4.66) otteniamo (4.62) sotto la condizione (4.63), da cui segue il Teorema 4.2.3.2.

La dimostrazione del Corollario 4.2.3.3 procede nel seguente modo. Se $0 \leq \xi \leq \frac{1}{N}$, per la formula di Stirling ed usando la regione priva di zeri della funzione $\zeta(s)$ abbiamo

$$\sum_\rho z^{-\rho}\Gamma(\rho) \ll \sum_\rho |z|^{-\beta}|\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\Big(\gamma \arctan 2\pi N\alpha - \frac{\pi}{2}|\gamma|\Big) = o(N) \ ,$$

dove $\rho = \beta + i\gamma$ varia sugli zeri non banali della funzione $\zeta(s)$. Segue che, ragionando come nella dimostrazione del Corollario 4.2.3.2, abbiamo

$$\int_{-\xi}^{\xi} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha \asymp N^2\xi \ .$$

Poichè $\int_{-\xi}^{\xi} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha$ è una funzione crescente in ξ, dal risultato precedente ricaviamo

$$\int_{-\xi}^{\xi} \left|\widetilde{S}(\alpha)\right|^2 d\alpha \gg N$$

per $\frac{1}{N} \le \xi \le \frac{1}{L}$. La relativa maggiorazione si ottiene dal Teorema 4.2.3.2. Il Corollario 4.2.3.3 segue allora ragionando in maniera simile nell'intervallo $\frac{1}{L} \le \xi \le \frac{1}{2}$.

2.4. G-numeri e la congettura di Montgomery.

Il metodo sviluppato da Goldston che abbiamo esaminato nel paragrafo 4.2.2 dipende fortemente dall'andamento asintotico di $J(N,H)$. Uno studio approfondito di tale asintotica è stato fatto da Montgomery-Goldston [**GoMo87**] che hanno provato che l'andamento asintotico di $J(N,H)$ è collegato ad una congettura sulla distribuzione, sotto RH, delle parti immaginarie degli zeri della funzione $\zeta(s)$ di Riemann.

Teorema 4.2.4.1 (Montgomery-Goldston). *Assumiamo RH. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

a) per ogni fissato $A > 1$, vale

$$F(X,T) := \sum_{0<\gamma,\gamma'<T} \frac{4X^{i(\gamma-\gamma')}}{4+(\gamma-\gamma')^2} \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$$

uniformemente per $T \le X \le T^A$;

b) per ogni fissato $\varepsilon > 0$ vale

$$\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 \, dx \sim \frac{1}{2}\delta X^2 \log \frac{1}{\delta}$$

uniformemente per $\frac{1}{X} \le \delta \le \frac{1}{X^\varepsilon}$;

c) per ogni fissato $\varepsilon > 0$ vale

$$\int_1^X (\psi(x+H) - \psi(x) - H)^2 \, dx \sim HX \log \frac{X}{H}$$

uniformemente per $1 \le H \le X^{1-\varepsilon}$.

La condizione a) è anche detta **"Congettura di Montgomery"**. Per un trattazione più completa di tale congettura e delle sue implicazioni in vari problemi della teoria dei numeri si vedano i lavori di Montgomery [**Mon73**], Gallagher-Mueller [**GaMu78**], Heath-Brown [**HB82a**], Heath-Brown-Goldston [**HBG84**], Goldston-Montgomery [**GoMo87**] e Goldston [**Gol85, Gol88**].

In un lavoro in preparazione, in collaborazione con il Prof. A. Perelli, l'autore ha ottenuto una ulteriore equivalenza tra le tre condizioni del teorema 4.2.4.1 e la seguente

d) per ogni fissato $\varepsilon > 0$ vale

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha) - T(\alpha)|^2 \, dx \sim 2X\xi \log X\xi$$

uniformemente per $\frac{1}{X^{1-\varepsilon}} \le \xi \le \frac{1}{2}$.

Si noti che la condizione a) differisce dalla stima banale, sotto RH,

$$F(X,T) \ll T \log^2 T$$

per un fattore $\log T$ e ciò si ripercuote sul guadagno di un fattore $\log X$ e $\log X\xi$ nelle condizioni *c)* e *d)*, rispettivamente, sempre rispetto alle stime sotto RH.

La tecnica di Goldston vista nel paragrafo 4.2.2 è in grado di avvantaggiarsi del guadagno di un fattore L nella stima di $J(N,H)$ riportando tale guadagno sulla lunghezza dell'intervallo per il problema di Goldbach in intervalli corti. Analogamente per la variante di Languasco-Perelli, come si deduce da *d)*.

Entrambe le tecniche sono quindi in grado di avvantaggiarsi della Congettura di Montgomery in modo da ottenere il seguente

Teorema 4.2.4.2 *Assumiamo RH e la Congettura di Montgomery. Esiste una costante* $c > 0$ *tale che, se* N *sufficientemente grande, l'intervallo* $[N, N + (2+c)L]$ *contiene almeno un G-numero.*

E' importante notare come la lunghezza L sia il limite sia del metodo di Goldston che di Languasco-Perelli a causa delle stime:

$$J(N,H) > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) HNL$$

per $1 \le H \le L^A$, $A > 0$ (vedi Goldston [**Gol84**]) e

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha) - T(\alpha)|^2 \, dx \gg N\xi L$$

per $\xi \in \left(\frac{1}{L}, \frac{1}{2}\right)$ (che si può provare utilizzando la tecnica del Teorema 2 di [**LP94**]).

Il seguente ragionamento consente di inquadrare meglio il problema : "qual è il limite dell'applicazione del metodo del cerchio al problema di Goldbach ?".

Sappiamo che, posto $a(m) = H - |m|$, si ha

$$\sum_{n=N-H}^{N+H} a(n-N)R(n) = \int_0^1 S(\alpha)^2 L(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha$$

$$= \int_0^1 M(\alpha)^2 L(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha + \int_0^1 (S(\alpha)^2 - M(\alpha)^2) L(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha,$$

dove $M(\alpha)$ è il Main Term "atteso". Applicando l'identità $M(\alpha)^2 - S(\alpha)^2 = 2M(\alpha)(M(\alpha) - S(\alpha)) - (M(\alpha) - S(\alpha))^2$ si ha che

$$\int_a^b |M(\alpha)^2 - S(\alpha)^2| d\alpha \le$$

$$2\int_a^b |M(\alpha)||S(\alpha)-M(\alpha)|d\alpha + \int_a^b |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha \leq$$

$$2\left(\int_a^b |M(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{1/2}\left(\int_a^b |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{1/2} + \int_a^b |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Poichè la stima attesa per $\int_0^1 |M(\alpha)|^2 d\alpha$ è $\ll N$, si ha allora che

$$\int_a^b |S(\alpha)^2 - M(\alpha)^2| d\alpha \ll \sqrt{N}\Big(\int_a^b |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha\Big)^{1/2} + \int_a^b |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Siccome il termine previsto per $\int_0^1 M(\alpha)^2 L(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha$ è $H^2 N$, vediamo che da una stima del tipo

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha \ll N\xi L f(N,\xi),$$

con $f(N,\xi)$ opportuna, per $N\to\infty$, deduciamo, integrando per parti (come visto nel paragrafo 4.3), l'esistenza di almeno un numero di Goldbach nell'intervallo $[N, N+H]$ se $H \gg Lf(N, H^{-1})$.

E' quindi fondamentale per il problema di Goldbach locale studiare la quantità

$$\int_{-\xi}^{\xi} |S(\alpha)-M(\alpha)|^2 d\alpha,$$

con $M(\alpha)$ opportuno.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, per $M(\alpha) = T(\alpha)$, si ha, supponendo RH, che $f(N,\xi) = L$, mentre in questo paragrafo, sempre per $M(\alpha) = T(\alpha)$, si ha, supponendo RH e MC, che $f(N,\xi) = 1$.

In realtà il Teorema 4.2.4.1 segue da

Teorema 4.2.4.3 (Goldston-Montgomery) *Assumiamo RH. Si hanno le seguenti implicazioni:*

(1) Se $0 < B_1 \leq B_2 \leq 1$ *e* $F(X,T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$ *uniformemente per*

$$\frac{X^{B_1}}{\log^3 X} \leq T \leq X^{B_2}\log^3 X$$

allora

$$\int_1^X \left(\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x\right)^2 dx \sim \frac{1}{2}\delta X^2 \log\frac{1}{\delta}$$

uniformemente per $\dfrac{1}{X^{B_2}} \leq \delta \leq \dfrac{1}{X^{B_1}}$;

(2) Se $1 < A_1 \leq A_2 < \infty$ e

$$\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 \, dx \sim \frac{1}{2}\delta X^2 \log \frac{1}{\delta}$$

uniformemente per $\dfrac{1}{X^{1/A_1} \log^3 X} \leq T \leq \dfrac{1}{X^{1/A_2}} \log^3 X$, *allora*

$$F(X,T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$$

uniformemente per

$$T^{A_1} \leq X \leq T^{A_2}.$$

La dimostrazione di tale teorema richiede alcuni risultati preliminari.

2.4.1. **Lemmi preliminari**. Tali lemmi sono stati dimostrati da Goldston-Montgomery [**GoMo87**].

Lemma 4.2.4.4 *Sia* $f(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ *e valga*

$$I(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} f(Y+y) dy = 1 + \varepsilon(Y) \ .$$

Allora detta $R(y)$ *una funzione Riemann-integrabile si ha*

$$\int_a^b R(y) f(Y+y) dy = \left(\int_a^b R(y) dy \right) (1 + \varepsilon'(y)) \, .$$

Inoltre, fissata R, $|\varepsilon'(Y)|$ *è piccolo se* $|\varepsilon(y)|$ *è piccolo uniformemente per* $Y+a-1 \leq y \leq Y+b+1$.

Lemma 4.2.4.5 *Sia* $f(t) \geq 0$ *una funzione continua definita su* $[0, +\infty)$ *tale che* $f(t) \ll \log^2(t+2)$.

Se

$$J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon(T)) T \log T,$$

allora

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u} \right)^2 f(u) du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k) \right) k \log \frac{1}{k},$$

con $|\varepsilon'(k)|$ *piccolo per* $k \to 0^+$ *se* $|\varepsilon(T)|$ *è piccolo uniformemente per*

$$\frac{1}{k \log^2 k} \leq T \leq \frac{1}{k} \log^2 k.$$

Lemma 4.2.4.6 *Sia* $f(t) \geq 0$ *una funzione continua definita su* $[0, +\infty)$ *tale che* $f(t) \ll \log^2(t+2)$.

Se

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u}\right)^2 f(u)du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k)\right) k \log \frac{1}{k}$$

allora

$$J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1 + \varepsilon')T \log T$$

con $|\varepsilon'|$ *piccolo se* $|\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$ *uniformemente per*

$$\frac{1}{T \log T} \leq k \leq \frac{1}{T} \log^2 T.$$

Lemma 4.2.4.7 *Sia* $F(X,T) := \sum_{0<\gamma,\gamma'<T} \frac{4X^{i(\gamma-\gamma')}}{4+(\gamma-\gamma')^2}$. *Allora*

1) $F(X,T) \geq 0$

2) $F(X,T) = F(1/X,T)$

3) Se vale RH allora

$$F(X,T) = T\left(\frac{1}{X^2}\log^2 T + \log X\right)\left(\frac{1}{2\pi} + O\left(\sqrt{\frac{\log\log T}{\log T}}\right)\right)$$

uniformemente per $1 \leq X \leq T$.

Lemma 4.2.4.8 *Sia* $\delta \in (0,1]$ *e* $a(s) = \dfrac{(1+\delta)^s - 1}{s}$.
Se $c(\gamma) \leq 1 \quad \forall\gamma$ *si ha che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(it)|^2 \left|\sum_\gamma \frac{c(\gamma)}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{|\gamma|\leq Z} a(1/2+i\gamma)\frac{c(\gamma)}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt$$
$$+ O\left(\delta^2 \log^3 \frac{2}{\delta}\right) + O\left(\frac{1}{Z}\log^3 Z\right)$$

per $Z > \frac{1}{\delta}$.

La dimostrazione del Teorema 4.2.4.3 si divide in due parti.

Proviamo (1).
Definiamo

$$J(X,T) = 4\int_0^T \left|\sum_\gamma \frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt.$$

Montgomery [**Mon73**] ha provato che

$$J(X,T) = 2\pi F(X,T) + O(\log^3 T)$$

e quindi l'ipotesi $F(X,T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$ equivale a

$$J(X,T) = (1+o(1))T\log T.$$

Ponendo $k = \frac{1}{2}\log(1+\delta)$ abbiamo

$$|a(it)|^2 = 4\left(\frac{\sin kt}{t}\right)^2.$$

Il Lemma 4.2.4.5 fornisce

$$\int_0^\infty |a(it)|^2 \left|\sum_\gamma \frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt = \left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right) k \log\frac{1}{k} = \left(\frac{\pi}{4}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}$$

per

$$\frac{1}{\delta \log^2 \frac{1}{\delta}} \le T \le \frac{3}{\delta}\log^2\frac{1}{\delta}.$$

Per il Lemma 4.2.4.8 e la parità dell'integranda si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt = \left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}$$

se $Z \ge \frac{1}{\delta}\log^3\frac{1}{\delta}$.

Detta $S(t) = \sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}$ notiamo che la sua trasformata di Fourier verifica

$$\hat{S}(u) = \pi\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)X^{i\gamma}e(-\gamma u)e^{-2\pi|u|}.$$

Dall'identità di Plancherel segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)X^{i\gamma}e(-\gamma u)\right|^2 e^{-4\pi|u|}du = \left(\frac{2}{\pi}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}\ .$$

Operando la sostituzione $Y = \log X$, $-2\pi u = y$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)e^{i\gamma(Y+y)}\right|^2 e^{-2|y|}dy = (1+o(1))\,\delta\log\frac{1}{\delta}\ . \tag{4.67}$$

Usando il Lemma 4.2.4.4 con $R(y) = \begin{cases} e^{2y} & \text{se } 0 \le y \le \log 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e ponendo $x = e^{Y+y}$ si ha

$$\int_X^{2X} \left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)x^\rho\right|^2 dx = \left(\frac{3}{2}+o(1)\right)\delta X^2\log\frac{1}{\delta}\ .$$

Rimpiazzando adesso X con $X2^{-j}$, sommando su j, $1 \le j \le K$, e usando la formula esplicita per $\psi(x)$ con $Z = X\log^3 X$ deduciamo

$$\int_{X2^{-K}}^{X} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - 2^{-2K} + o(1)\right)\delta X^2 \log\frac{1}{\delta}\ .$$

Poniamo infine $K = [\log\log X]$ e ricorriamo, per l'intervallo $1 \le x \le X2^{-K}$, alla stima di Lemma 4.2.4.7 (con $X2^{-K}$ al posto di X). In tal modo otteniamo (1).

Proviamo (2).

Fissiamo un numero reale X_1. Integrando per parti tra X_1 e $X_2 = X_1\log^{2/3} X_1$ otteniamo, ricordando che in ipotesi abbiamo

$$\int_{1}^{X} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2\, dx \sim \frac{1}{2}\delta X^2 \log\frac{1}{\delta},$$

che

$$\int_{X_1}^{X_2} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2\, x^{-4} dx = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\delta X_1^{-2} \log\frac{1}{\delta}\ . \qquad (4.68)$$

Utilizzando la stima, valida sotto RH (vedi Saffari-Vaughan [**SV77**])

$$\int_{1}^{X} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2\, dx \ll \delta X^2 \log^2\frac{2}{\delta}\ ,$$

deduciamo analogamente a quanto fatto in precedenza che

$$\int_{X_2}^{\infty} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2\, x^{-4} dx \ll \delta X_2^{-2} \log^2\frac{1}{\delta} = o(\delta X_1^{-2}\log\frac{1}{\delta})\ . \qquad (4.69)$$

Sommando adesso (4.68) e (4.69) e moltiplicando la somma per X_1^2 otteniamo

$$\int_{1}^{\infty} \min\left(\frac{x^2}{X_1^2}, \frac{X_1^2}{x^2}\right) (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2\, x^{-2} dx = (1 + o(1))\delta \log\frac{1}{\delta}\ .$$

Ponendo $X_1 = X$, $Y = \log X$, $x = e^{Y+y}$ e usando la formula esplicita per $\psi(x)$ con $Z = X\log^3 X$, otteniamo l'equazione (4.67). A partire dalla summenzionata (4.67) si può seguire la dimostrazione del punto (1) a ritroso. L'unica differenza consiste nell'applicare il Lemma 4.2.4.6 anzichè il Lemma 4.2.4.5. $\square$

Passiamo a provare il Teorema 4.2.4.1.

Osserviamo che l'equivalenza tra (a) e (b) segue dal Teorema 4.2.4.3, dal fatto che il Lemma 4.2.4.7 fornisce $F(X,T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$ nell'intervallo $\frac{X}{\log^3 X} \le T \le X$ e che la relazione

$$\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 \, dx \sim \frac{1}{2} \delta X^2 \log \frac{1}{\delta}$$

è banale nell'intervallo $\frac{1}{X \log^3 X} \le \delta \le \frac{1}{X}$.

L'equivalenza tra (b) e (c) segue dal metodo di Saffari-Vaughan (vedi [**SV77**]) per passare da risultati sull'integrale di Selberg con intervallo variabile rispetto alla x (δx) a risultati sull'integrale di Selberg con intervallo fisso (H). □

2.5. G-numeri e la congettura di Elliott-Halberstam.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, il metodo di Goldston per i numeri di Goldbach in intervalli ha come limite L.
Al fine di poter ottenere intervalli ancora più corti, Friedlander-Goldston [**FrGo92**] hanno modificato tale metodo per poter evidenziare un termine di errore dipendente dalla media della distribuzione dei primi nelle progressioni aritmetiche.
Per stimare tale termine di errore è però necessario ricorrere ad una ulteriore congettura (oltre all'Ipotesi di Riemann e la Congettura di Montgomery) perchè il Teorema di Bombieri-Vinogradov è valido essenzialmente solo fino al livello $q \le N^{1/2}$, mentre in questo caso è necessario un livello più grande.

2.5.1. **La congettura di Elliott-Halberstam**. Siano q, a due interi e $q \ge 1$. Detta allora

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \pmod q}} \Lambda(n)$$

definiamo la quantità

$$E(x;q,a) = \psi(x;q,a) - \frac{x \chi_0(a)}{\varphi(q)} ,$$

dove χ_0 è il carattere principale modulo q, e, detto Q un parametro, consideriamo il problema:

per quali valori di Q vale la stima

$$\max_a \sum_{q \le Q} |E(x;q,a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{4.70}$$

dove $A > 0$ è una costante arbitraria e le costanti implicite dipendono solo da A ?

Il Teorema di Bombieri-Vinogradov fornisce la validità di (4.70) nel caso in cui $Q = x^{1/2}(\log x)^{-B}$, con B costante opportuna dipendente solo da A.

Elliott e Halberstam [**EH68**] congetturarono :

la (4.70) è vera per un livello Q "non tanto più piccolo di x".

I lavori di Friedlander-Granville [**FrGr89**] e di Friedlander-Granville-Hildebrand-Maier [**FGHM91**] forniscono delle limitazioni dall'alto per la grandezza di Q.
In particolare in [**FGHM91**] si prova che :

per ogni $A > 0$ la (4.70) non è valida per ogni

$$Q > x/L(x)^{(1-\varepsilon)A}, \quad \textit{con } L(x) = \exp((\log\log x)^2/\log\log\log x).$$

Tenendo in considerazione quanto sopra, nella nostra applicazione prenderemo

$$Q = \frac{x}{L(x)^{c(A)}} \quad \text{con } c(A) > 0 \quad \text{costante opportuna}$$

oppure, volendo un livello più "sicuro"

$$Q = \frac{x}{\exp\left((\log\log x)^B\right)} \quad \text{con } B > 0 \text{ costante opportuna sufficientemente grande.}$$

Ci servirà anche una versione modificata di (4.70) che utilizza la seguente "funzione di Von Mangoldt troncata"

$$\Lambda_Q(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\le Q}} \mu(d)\log(Q/d).$$

Poichè $\Lambda(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)\log(n/d)$, abbiamo $\Lambda_n(n) = \Lambda(n)$.

Definiamo allora

$$\psi_Q(x;q,a) = \sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv a(\mod q)}} \Lambda_Q(n)$$

e

$$E_Q(x;q,a) = \psi_Q(x;q,a) - \frac{x\chi_0(a)}{\varphi(q)} \ ,$$

dove χ_0 è il carattere principale modulo q, e richiediamo che valga

$$\max_a \sum_{q\le Q} |E_Q(x;q,a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{4.71}$$

dove $A > 0$ è una costante arbitraria e le costanti implicite dipendono solo da A.

Come sarà evidente dalle dimostrazioni, richiederemo che (4.70) e (4.71) valgano solamente per a su certi intervalli.

L'idea di usare la funzione $\Lambda_Q(n)$ si ritrova nei lavori di Turan [**Tur64**], Huxley [**Hux72**], Bombieri [**Bom75**] ed Heath-Brown [**HB85**]. Goldston stesso ha utilizzato $\Lambda_Q(n)$ in [**Gol92a**] per studiare i primi in intervalli corti e per ottenere una nuova dimostrazione di un teorema di Bombieri-Davenport [**BD66**] senza usare il metodo del cerchio.
La stima (4.71) può essere provata in un intervallo $Q < x^{1/2}(\log x)^{-B}$ e si ritiene che valga essenzialmente nello stesso intervallo in cui vale (4.70).
In realtà, in qualche senso, l'andamento di Λ_Q nelle progressioni è migliore di quello di Λ poichè si può provare una formula asintotica per $\psi_Q(x;q,a)$ con una uniformità in q molto più grande di quella conosciuta per la corrispondente formula per $\psi(x;q,a)$ (Heath-Brown in [**HB85**] ha dimostrato tale risultato per una funzione strettamente legata a $\psi_Q(x;q,a)$).

2.5.2. **I risultati**.

Lemmi preliminari

Utilizzando un analogo del Teorema di Bombieri-Vinogradov e del Teorema di Siegel-Walfisz per la Λ_Q (Proposizione 3 di [**FrGo92**]) si provano i seguenti lemmi (per le dimostrazioni si veda [**FrGo92**]).

Lemma 4.2.5.1 *Sia $\varepsilon > 0, A > 0$. Si ha, per $N^\varepsilon \leq Q \leq N$,*

$$\sum_{n \leq N} \Lambda_Q^2(n) = N \log Q + O(N). \tag{4.72}$$

Inoltre per qualche $c(A)$ opportuna e per tutti i Q, k tali che $N^\varepsilon \leq Q \leq \dfrac{N}{L(N)^{c(A)}}$ e $0 < |k| \leq Q^{1/4}$, si ha

$$\sum_{n \leq N} \Lambda_Q(n)\Lambda(n+k) = \mathfrak{S}(k)N + O\left(L \sum_{d \leq Q} |E(N;d,k)|\right) + O\left(\frac{N}{L^A}\right); \tag{4.73}$$

$$\sum_{n \leq N} \Lambda_Q(n)\Lambda_Q(n+k) = \mathfrak{S}(k)N + O\left(L \sum_{d \leq Q} |E_Q(N;d,k)|\right) + O\left(\frac{N}{L^A}\right). \tag{4.74}$$

Se k verifica $0 < |k| \leq L^A$ allora (4.73) e (4.74) valgono per $N^\varepsilon \leq Q \leq \dfrac{N}{L^{2A+1}}$.

Lemma 4.2.5.2 *Sia $\varepsilon > 0, A > 0$. Per qualche $c(A)$ opportuna e per tutti i Q, n tali che $N^\varepsilon \leq Q \leq \dfrac{N}{L(N)^{c(A)}}$ e $N/2 \leq n \leq 2N$, si ha*

$$\sum_{j \leq N} \Lambda_Q(j)\Lambda(n-j) = \mathfrak{S}(n)n + O\left(L \sum_{d \leq Q} |E(n;d,n)|\right) + O\left(\frac{N}{L^A}\right); \tag{4.75}$$

$$\sum_{j \leq N} \Lambda_Q(j)\Lambda_Q(n-j) = \mathfrak{S}(n)n + O\left(L \sum_{d \leq Q} |E_Q(n;d,n)|\right) + O\left(\frac{N}{L^A}\right). \tag{4.76}$$

Ci servirà anche il seguente lemma sulla somma pesata della serie singolare

Lemma 4.2.5.3 *Si ha*

$$\sum_{\substack{k=-H \\ k \neq 0}}^{H} (H - |k|)\mathfrak{S}(k) = H^2 - H \log H + H(1 - \gamma - \log 2\pi) + O(H^{1/2+\varepsilon}).$$

2.5.3. **Risultati sui numeri di Goldbach**. Detti come al solito

$$R(n) = \sum_{h+k=n} \Lambda(h)\Lambda(k) = \sum_{j\le n} \Lambda(j)\Lambda(n-j)\ ,$$

$$\mathfrak{S}(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \mathfrak{S} \prod\limits_{\substack{p\mid n \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) & \text{se } n \text{ è pari, } n \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\mathfrak{S} = 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

otteniamo

Teorema 4.2.5.1 *Siano* $\varepsilon > 0$, $A > 0$ *fissati. Allora, per* $c = c(A) > 0$ *opportuna e per ogni* $N \ge 3$, $N^\varepsilon \le Q \le \dfrac{N}{L(N)^{c(A)}}$ *e* $2 \le H \le Q^{1/4}$, *si ha*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=-H}^{H} (H-|k|)\left(R(N+k) - (N+k)\mathfrak{S}(N+k)\right)\right| \\ \le J(N,H) - HN\log(Q/H) + O(HN) + O\left(\frac{H^2N}{L^A}\right) \\ + O\left(H^2L \max_{|k|\le H}\ \max_{0<|a|\le 2N} \sum_{d\le Q}\left(|E(N;d,a)| + |E_Q(N+k;d,a)|\right)\right). \qquad (4.77)\end{aligned}$$

Dal teorema precedente deduciamo

Corollario 4.2.5.1 *Supponiamo che valgano RH e MC.*
Inoltre valgano (4.70) e (4.71) per $|x-N| \le H$, $0 < |a| \le 2N$ *e* $Q \le \dfrac{N}{L(N)^{c(A)}}$.
Allora, se $H > c\log(N/Q)$ *per* $c > 0$ *costante assoluta opportuna, esiste almeno un numero di Goldbach nell'intervallo* $(N-H, N]$.

Ponendo $Q = \dfrac{N}{L(N)^{c(A)}}$ si ottiene allora $H > C\dfrac{(\log L)^2}{\log\log L}$, per qualche costante $C > 0$ mentre, assumendo un livello"più sicuro", $Q = \dfrac{N}{\exp((\log L)^B)}$ si ottiene $H > c(\log L)^B$, per qualche $B > 0$ sufficientemente grande.

Per la dimostrazione del Teorema 4.2.5.1 definiamo

$$\tilde{\Lambda}_Q(n) = \Lambda(n) - \Lambda_Q(n).$$

Abbiamo allora

$$R(n) = \sum_{j\le n} \Lambda(j)\Lambda(n-j) = \sum_{j\le n} \left(\Lambda_Q(j) + \tilde{\Lambda}_Q(j)\right)\Lambda(n-j)$$

$$= \sum_{j\le n} \Lambda_Q(j)\Lambda(n-j) + \sum_{j\le n} \tilde{\Lambda}_Q(j)\left(\Lambda_Q(n-j) + \tilde{\Lambda}_Q(n-j)\right)$$

$$= \sum_{j\le n} \Lambda_Q(j)\Lambda(n-j) + \sum_{j\le n} \tilde{\Lambda}_Q(j)\tilde{\Lambda}_Q(n-j) + \sum_{j\le n} \left(\Lambda(j) - \Lambda_Q(j)\right)\Lambda_Q(n-j)$$

$$= \sum_{j\le n} \left(\Lambda_Q(j)\Lambda(n-j) + \Lambda(j)\Lambda_Q(n-j)\right) - \sum_{j\le n} \Lambda_Q(j)\Lambda_Q(n-j) + \sum_{j\le n} \tilde{\Lambda}_Q(j)\tilde{\Lambda}_Q(n-j)$$

$$= 2\sum_{j\le n} \Lambda_Q(j)\Lambda(n-j) - \sum_{j\le n} \Lambda_Q(j)\Lambda_Q(n-j) + \sum_{j\le n} \tilde{\Lambda}_Q(j)\tilde{\Lambda}_Q(n-j).$$

Analogamente si può provare che

$$Z(N,k) := \sum_{j\le N} \Lambda(j)\Lambda(j+k)$$

$$= \sum_{j\le N} \left(\Lambda_Q(j)\Lambda(j+k) + \Lambda(j)\Lambda_Q(j+k)\right) - \sum_{j\le N} \Lambda_Q(j)\Lambda_Q(j+k) + \sum_{j\le N} \tilde{\Lambda}_Q(j)\tilde{\Lambda}_Q(j+k).$$

Allora, per il Lemma 4.2.5.1, si ha

$$Z(N,0) = N\log Q + \sum_{n\le N} \tilde{\Lambda}_Q^2(n) + O(N) \tag{4.78}$$

e, se $k \neq 0$,

$$Z(N,k) = \mathfrak{S}(k)N + \sum_{n\le N} \tilde{\Lambda}_Q(n)\tilde{\Lambda}_Q(n+k) + O\left(\frac{N}{L^A}\right) \tag{4.79}$$

$$+O\left(L\left(\sum_{d\le Q} |E(N;d,k)| + |E(N;d,-k)| + |E_Q(N;d,k)|\right)\right).$$

Quindi considerando $T(\alpha) = \sum_k t(k)e(-k\alpha)$, con $t(k) = \max(H - |k|, 0)$ e

$$\tilde{S}(\alpha) = \sum_{1\le n\le N+H} \tilde{\Lambda}_Q(n)e(n\alpha)$$

si ha che

$$\int_0^1 |\tilde{S}(\alpha)|^2 T(\alpha)\,d\alpha = \sum_k t(k) \sum_{\substack{n,m\le N+H\\ n-m=k}} \tilde{\Lambda}_Q(n)\tilde{\Lambda}_Q(m)$$

$$= \sum_k t(k) \sum_{n\le N} \tilde{\Lambda}_Q(n)\tilde{\Lambda}_Q(n+k) + O(H^3 d(n)^2 (\log Q)^2)$$

(usando $|\tilde{\Lambda}_Q(n)| \le d(n)\log Q$).

Allora, per il teorema dei numeri primi, per (4.78) e (4.79) si ha

$$\int_0^1 |\tilde{S}(\alpha)|^2 T(\alpha)e(-n\alpha)\,d\alpha = HN\log(N/Q) + O(HN) + \sum_{k\neq 0} t(k)\left[Z(N,k) - \mathfrak{S}(k)N\right]$$

$$+O\left(\frac{H^2N}{L^A}\right)+O\left(H^2L\max_a\sum_{d\le Q}\left(|E(N;d,a)|+|E_Q(N;d,a)|\right)\right).$$

Nel paragrafo 4.2 abbiamo provato una leggera modifica della seguente

$$J(N,H)=HNL+\sum_{k\neq 0}t(k)Z(N,k)-H^2N+O(HN)+O\left(\frac{H^2N}{L^A}\right)$$

che adesso utilizziamo, insieme al Lemma 4.2.5.3, per ottenere

$$\int_0^1|\tilde{S}(\alpha)|^2T(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha=J(N,H)-HN\log(Q/H)+O(HN) \tag{4.80}$$

$$+O\left(\frac{H^2N}{L^A}\right)+O\left(H^2L\max_a\sum_{d\le Q}\left(|E(N;d,a)|+|E_Q(N;d,a)|\right)\right).$$

Ritornando al problema di Goldbach si osservi che

$$\int_0^1\tilde{S}(\alpha)^2T(\alpha)e(-n\alpha)\,d\alpha=\sum_k t(k)\sum_{j\le N+k}\tilde{\Lambda}_Q(j)\tilde{\Lambda}_Q(n+k-j) \tag{4.81}$$

$$=\sum_k t(k)\left[R(n+k)-2\sum_{j\le N+k}\Lambda_Q(j)\Lambda(n+k-j)+\sum_{j\le N+k}\Lambda_Q(j)\Lambda_Q(n+k-j)\right],$$

e quindi, poichè $\int_0^1\tilde{S}(\alpha)^2T(\alpha)e(-n\alpha)\,d\alpha\le\int_0^1|\tilde{S}(\alpha)|^2T(\alpha)\,d\alpha$, abbiamo

$$\sum_k t(k)\left[R(n+k)-2\sum_{j\le N+k}\Lambda_Q(j)\Lambda(n+k-j)+\sum_{j\le N+k}\Lambda_Q(j)\Lambda_Q(n+k-j)\right]$$

$$\le J(N,H)-HN\log(Q/H)+O(HN)+O\left(\frac{H^2N}{L^A}\right)$$

$$+O\left(H^2L\max_a\sum_{d\le Q}\left(|E(N;d,a)|+|E_Q(N;d,a)|\right)\right). \tag{4.82}$$

Utilizzando adesso il Lemma 4.2.5.2 e la disuguaglianza (che si prova in modo diretto)

$$|E(N+H;d,a)-E(N,d,a)|\ll\left(\frac{H}{d}+1\right)\log(NH)+\frac{H}{\varphi(d)}$$

si ha che

$$\sum_k t(k)\left[R(n+k)-2\sum_{j\le N+k}\Lambda_Q(j)\Lambda(n+k-j)+\sum_{j\le N+k}\Lambda_Q(j)\Lambda_Q(n+k-j)\right]$$

$$\le\sum_k t(k)\left[R(n+k)-\mathfrak{S}(N+k)(N+k)\right]+O\left(\frac{H^2N}{L^A}\right)+$$

$$O\left(H^2L\max_{|k|\le H}\max_{a}\sum_{d\le Q}\left(|E(N;d,a)|+|E_Q(N+k;d,a)|\right)\right). \tag{4.83}$$

Combinando allora (4.83) e (4.82) si ha il Teorema. □

Esponiamo ora la dimostrazione del Corollario 4.2.5.1.

Per RH e le congetture di Montgomery e di Elliott-Halberstam otteniamo che il secondo membro di (4.77) è uguale a

$$HN\log(N/Q)+o(H^2N).$$

Poichè per k pari si ha $\mathfrak{S}(k)\ge\mathfrak{S}\ge 1$, abbiamo

$$\sum_{k=-H}^{H}(H-|k|)(N+k)\mathfrak{S}(N+k)\ge\sum_{k=-H}^{H}(H-|k|)(N+k)\gg H^2N.$$

Pertanto

$$\sum_{k=-H}^{H}(H-|k|)R(N+k)\gg H^2N+HN\log(N/Q)+o(H^2N).$$

Il corollario segue prendendo $H>c\log(N/Q)$, con $c>0$ sufficientemente grande, e osservando che le potenze prime contribuiscono alla relazione precedente per al più $H^2\sqrt{N}L$. □

Bibliografia

[Apo76] T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, UTM, Springer-Verlag, 1976.

[BH82] R.C. Baker and G. Harman, *Diophantine approximation by prime numbers*, J. London Math. Soc. (2) **25** (1982), 201–215.

[BH] R.C. Baker and G. Harman, risultato annunciato alla conferenza di Oberwolfach, 1994.

[Bom75] E. Bombieri, *On twin almost primes*, Acta Arith. **28** (1975), 177–193. Corrigendum ibid. **28** (1975), 457–461.

[Bom87] E. Bombieri, *Le Grand Crible dans la Théorie Analytique des Nombres*, 2 ed., Soc. Math. de France (Asterisque), vol. 18, 1987.

[BD66] E. Bombieri and H. Davenport, *Small differences between prime numbers*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **293** (1966), 1–18.

[BFI86] E. Bombieri, J.B. Friedlander and H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progression to large moduli*, Acta Math. **156** (1986), 203–251.

[BFI87] E. Bombieri, J.B. Friedlander and H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progression to large moduli II*, Math. Ann. **277** (1987), 361–393.

[BFI89] E. Bombieri, J.B. Friedlander and H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progression to large moduli III*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 215–224.

[Bru19] V. Brun, *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach*, C.R. Acad. Sci. Paris **168** (1919), 544–546.

[Che66] J. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes (cinese)*, Kexue Tongbao **17** (1966), 385–386.

[Che73] J. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica **16** (1973), 157–176.

[Che83] J. Chen, *The exceptional set of Goldbach number*, Sci. Sinica **26** (1983), 714–731.

[Chu37] N. Chudakov, *On Goldbach's problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **17** (1937), 331–334, (russo).

[VdC38] J.G. Van der Corput, *Sur l'hypothèse de Goldbach*, Proc. Akad. Wet Amsterdam **41** (1938), 76–80.

[Dav80] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2^{a} ed., GTM, vol. 74, Springer-Verlag, 1980.

[EH68] P.D.T.A. Elliott and H. Halberstam, *A conjecture in prime number theory*, Symp. Math. **IV**, Roma (1968/69), 59–72.

[Est38] T. Estermann, *On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes*, Proc. London Math. Soc. (2) **44** (1938), 307–314.

[FG86] E. Fouvry and F. Grupp, *On the switching principle in sieve theory*, J. Reine Angew. Math. **370** (1986), 101–126.

[FG89] E. Fouvry and F. Grupp, *Weighted sieve an twin primes type equations*, Duke Math. J. **58** (1989), 731–748.

[FrGr89] J.B. Friedlander and A. Granville, *Limitations to the equi-distribution of primes I*, Ann. of Math. (2) **129** (1989), 363–382.

[FGHM91] J.B. Friedlander, A. Granville, A. Hildebrand, and H. Maier, *Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 25–86.

[FrGo92] J.B. Friedlander and D.A. Goldston, *Some singular series averages and the distribution of Goldbach numbers in short intervals*, preprint 1992.

[Gal70] P.X. Gallagher, *A large sieve density estimate near* $\sigma = 1$, Invent. Math. **11** (1970), 329–339.

[Gal80] P.X. Gallagher, *Some consequences of the Riemann Hypothesis*, Acta Arith. **37** (1980), 339–343.

[GaMu78] P.X. Gallagher and J.H. Mueller, *Primes and zeros in short intervals*, J. Reine Angew. Math. **303/304** (1978), 205–220.

[Gol84] D.A. Goldston, *The second moment for prime numbers*, Quart. J. Math. Oxford (2) **35** (1984), 153–163.

[Gol85] D.A. Goldston, *Prime numbers and the pair correlation of zeros of zeta function*, Topics in An. Num. Th. (Austin,Texas) (1985), 82–91.

[Gol88] D.A. Goldston, *On the pair correlation conjecture for zeros of the Riemann zeta-function*, J. Reine Angew. Math. **385** (1988), 24–40.

[Gol90] D.A. Goldston, *Linnik's theorem on Goldbach numbers in short intervals*, Glasgow Math. J. **32** (1990), 285–297.

[Gol92a] D.A. Goldston, *On Bombieri and Davenport's theorem concerning small gaps between primes*, Mathematika **39** (1992), 10–17.

[Gol92b] D.A. Goldston, *On the Hardy and Littlewood's contributions to the Goldbach conjecture*, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory, 115–155, edito da E. Bombieri et al., Università di Salerno 1992.

[GoMo87] D.A. Goldston and H.L. Montgomery, *Pair correlation of zeros and primes in short intervals*, Proc. of a Conference at Oklahoma State University 1984 (1987), 183–203, Analytic Number Theory and Diophantine Problems (Ed. Boston-Basel-Stuttgart).

[Gre] G. Greaves, *Rosser's sieve with weights*, Recent Progress in Analytic Number Theory - Academic Press **1**, 61–68.

[HR74] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974.

[HL23a] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *Some problems of "Partitio Numerorum";III. On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[HL23b] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *Some problems of "Partitio Numerorum";V. A further contribution to the study of Goldbach's problem*, Proc. London Math. Soc. (2) **22** (1923), 46–56.

[HW] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5ª ed.,Oxford, Clarendon Press, 1990.

[HB82a] D.R. Heath-Brown, *Gaps between primes, and the pair correlation of zeros of zeta-function*, Acta Arith. **41** (1982), 85–99.

[HB82b] D.R. Heath-Brown, *Primes in 'almost all' short intervals*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1982), 385–396.

[HB85] D.R. Heath-Brown, *The ternary Goldbach problem*, Rev. Matem. Iberoamericana **1** (1985), 45–59.

[HB86] D.R. Heath-Brown, *Artin's conjecture for primitive roots*, Quarterly J. Math. Oxford (2) **37** (1986), 27–38.

[HBG84] D.R. Heath-Brown and D.A. Goldston, *A note on the difference between consecutive primes*, Math. Ann. **266** (1984), 317–320.

[Hux72] M.N. Huxley, *Irregularity in shifted sequences*, J. of Number Theory **4** (1972), 437–454.

[Hux75] M.N. Huxley, *Large value of Dirichlet polynomials III*, Acta Arith. **26** (1975), 435–444.

[Ivi85] A. Ivić, *The Riemann Zeta-function*, John Wiley and Sons, 1985.

[Iwa72] H. Iwaniec, *Primes of the type $\Phi(x, y) + a$, where Φ is a quadratic form*, Acta Arith. **21** (1972), 203–224.

[Iwa80] H. Iwaniec, *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arith. **37** (1980), 307–320.

[KPP93] J. Kaczorowski, A. Perelli, and J. Pintz, *A note on the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals*, Mh. Math. **116** (1993), 275–282. Corrigendum ibid., in corso di stampa.

[Ká67] I. Kátai, *A remark on a paper of Ju.V. Linnik*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl **17** (1967), 99–100.

[Lab79] M. Laborde, *Buchstab's shifting weights*, Mathematika **26** (1979), 250–257.

[LP94] A. Languasco and A. Perelli, *On Linnik's theorem on Goldbach numbers in short intervals and related problems*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), no. 2, 307–322.

[Lav59] A.F. Lavrik, *Estimation of certain integrals connected with the additive problems*, Vestnik Leningrad Univ. **19** (1959), 5–12, (russo).

[Lin52] Yu.V. Linnik, *Some conditional theorems concerning the binary Goldbach problem*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **16** (1952), 503–520, (russo).

[Mik92] H. Mikawa, *On the exceptional set in Goldbach's problem*, Tsukuba j. Math. **16** (1992), no. 2, 513–543.

[Mon71] H.L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 227, Springer-Verlag, 1971.

[Mon73] H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Symp. Pure Math. **24** (1973), 181–193.

[MV73] H.L. Montgomery and R.C. Vaughan, *On the large sieve*, Mathematika **20** (1973), 119–134.

[MV75] H.L. Montgomery and R.C. Vaughan, *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arith. **27** (1975), 353–370.

[PPS85] A. Perelli, J. Pintz, and S. Salerno, *Bombieri's theorem in short intervals II*, Invent. Math. **79** (1985), 1–19.

[PP92] A. Perelli and J. Pintz, *On the exceptional set in the 2k-twin primes problem*, Compositio Math. **82** (1992), 355–372.

[PP93] A. Perelli and J. Pintz, *On the exceptional set for Goldbach problem in short interval*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), 41–49.

[Pra57] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, 1957.

[Ram73] K. Ramachandra, *On the number of Goldbach numbers in short intervals*, J. Indian Math. Soc. **37** (1973), 157–170.

[Ram76] K. Ramachandra, *Some problems in analytic number theory*, Acta Arith. **31** (1976), 313–324.

[Ram77] K. Ramachandra, *Two remarks in prime number theory*, Bull. Soc. math. France **105** (1977), 433–437.

[SV77] B. Saffari and R.C. Vaughan, *On the fractional parts of x/n and related sequences II*, Ann. Inst. Fourier **27** (1977), 1–30.

[Sel43] A. Selberg, *On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes*, Arch. Math. Naturvid. **47** (1943), 87–105.

[Tur64] P. Turan, *On the twin prime problem I*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. Ser. (4) **9** (1964), 247–261.

[Vau72] R.C. Vaughan, *On Goldbach's problem*, Acta Arith. **22** (1972), 21–48.

[Vau81] R.C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood Method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, 1981.

[Vin37a] I.M. Vinogradov, *The representation of an odd number as a sum of three primes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **16** (1937), 139–142.

[Vin37b] I.M. Vinogradov, *Some theorems concerning the theory of primes*, Mat. Sb. NS **2** (1937), 179–195.

[Vin85] I.M. Vinogradov, *Selected works*, Springer-Verlag, 1985.

[Wat] N. Watt, risultato annunciato alla conferenza di Oberwolfach, 1994 .

[Wol89] D. Wolke, *Über das Primzahl-Zwillingsproblem*, Math. Ann. **283** (1989), 529–537.