

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 22.01.2024

TEMA 1

Correzioni Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a). La funzione è definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il segno è determinato dal segno dell'argomento dell'arctan. Si vede facilmente che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Inoltre la funzione è dispari sempre perché il suo segno dipende da quello dell'argomento dell'arctan e perché l'arctan è dispari.

(b). Vediamo i limiti notevoli. È facile vedere che:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) &= \mp \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \pm \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro, mentre $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.

(c). Nel dominio D la funzione è continua e derivabile. Calcoliamo la derivata per $x \in D$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2} \frac{x \cdot 2x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + (x^2 - 1)^2}$$

Si vede immediatamente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Quindi la funzione risulta strettamente monotona crescente su ogni intervallo contenuto in D . La funzione non assume né massimo né minimo ed ha:

$$\inf_D f = -\pi/2, \quad \sup_D f = \pi/2.$$

Si possono controllare gli attacchi della derivata destra e sinistra in 0. Si ha immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = 1$$

(s). Il grafico della funzione segue:

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\frac{z}{2\bar{z}} = \frac{\operatorname{Im}(\bar{z})}{|z|^2} i.$$

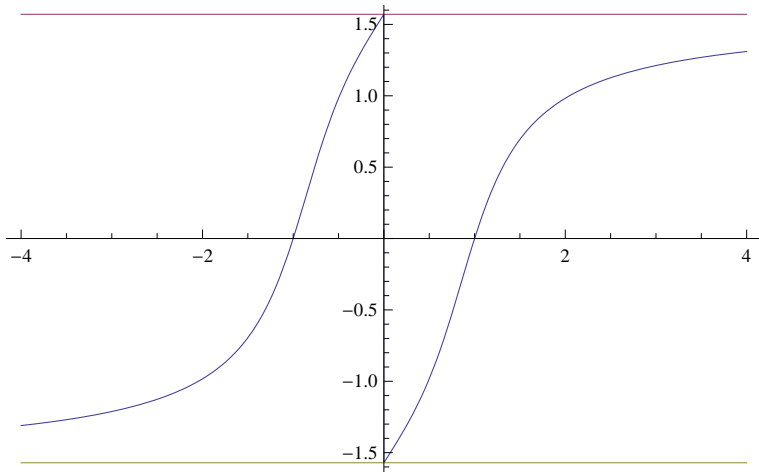


Figure 1: La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. L'equazione è definita per ogni $z \neq 0$. Possiamo quindi moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per \bar{z} , ricordando che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, otteniamo

$$\frac{z}{2} = -i \frac{y}{z} \iff z^2 = -2iy.$$

Scrivendo $z = x + iy$ ed uguagliando parti reali e immaginarie a zero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

che ha tre soluzioni: $z_0 = 0$ (che non è compatibile con il campo di esistenza) e $z_{1,2} = -1 \pm i$ che sono le sole soluzioni del problema e che hanno la seguente rappresentazione in \mathbb{C}

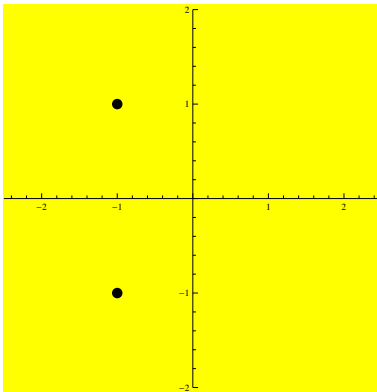


Figure 2: Le soluzioni dell'equazione $\frac{z}{2\bar{z}} = \frac{\text{Im}(\bar{z})}{|z|^2}i$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n \ln n + 3 \sin^2 n}.$$

Svolgimento. Vediamo prima la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|3x|^{n+1}}{(n+1) \log(n+1) + 3 \sin^2(n+1)} \frac{n \log n + 3 \sin^2 n}{|3x|^n} \rightarrow |3x| \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Quindi per $|x| < \frac{1}{3}$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; per $|x| > \frac{1}{3}$ la serie non converge (perché il termine n -esimo non è infinitesimo).

Per $x = \frac{1}{3}$ la serie è a termini positivi e il termine n -esimo è asintotico a $\frac{1}{n \log n}$ che dà una serie divergente. Quindi la serie diverge.

Per $x = -\frac{1}{3}$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{1}{n \log n + 3 \sin^2 n} > 0$ definitivamente inoltre $a_n \rightarrow 0$. La serie non converge assolutamente per l'argomento del caso $x = 1/3$. Per poter applicare il criterio di Leibniz per stabilire la convergenza semplice resta solo da controllare che a_n sia definitivamente decrescente. Infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log x + 3 \sin^2 x}$ ha derivata $f'(x) = \frac{-\log x - 1 - 6 \sin x \cos x}{(x \log x + 3 \sin^2 x)^2}$ che è definitivamente negativa per $x \rightarrow \infty$. Quindi la serie converge semplicemente.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \sin x} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Suggerimento: Si ricordi che $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Svolgimento.

(a). Poniamo $1 - \sin x = t$ da cui $-\cos x dx = dt$, l'integrale diventa

$$-\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \log t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \log 2.$$

(b). In un intorno destro di zero la funzione è limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'unico punto problematico è $\frac{\pi}{2}$. Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$ e usiamo il suggerimento per ottenere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\alpha/2} t}{1 - \cos t} dt.$$

Ora il problema si è spostato nel punto 0. Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin riportati, otteniamo che la funzione integranda per $x \rightarrow 0^+$ è asintotica a $\frac{2}{t^{-\frac{\alpha}{2}+2}}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-\frac{\alpha}{2} + 2 < 1$ cioè $\alpha > 2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 22.01.2024

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 4}{x}\right)$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a) La funzione è definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il segno è determinato dal segno dell'argomento dell' \arctan . Si vede facilmente che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$. Inoltre la funzione è dispari sempre perché il suo segno dipende da quello dell'argomento dell' \arctan e perché l' \arctan è dispari.

(b) Vediamo i limiti notevoli. È facile vedere che:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) &= \mp \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \pm \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro, mentre $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.

(c) Nel dominio D la funzione è continua e derivabile. Calcoliamo la derivata per $x \in D$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-4}{x}\right)^2} \frac{x \cdot 2x - (x^2 - 4)}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2 + (x^2 - 4)^2}$$

Si vede immediatamente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Quindi la funzione risulta strettamente monotona crescente su ogni intervallo contenuto in D . La funzione non assume né massimo né minimo ed ha:

$$\inf_D f = -\pi/2, \quad \sup_D f = \pi/2.$$

Si possono controllare gli attacchi della derivata destra e sinistra in 0. Si ha immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \frac{1}{4}$$

(d) Il grafico della funzione segue:

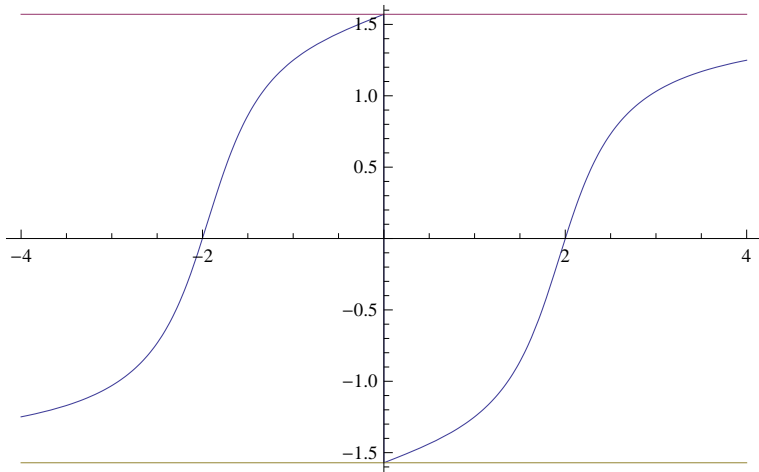


Figure 3: La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-4}{x}\right)$

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|3z|^2}i.$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. L'equazione é definita per ogni $z \neq 0$. Possiamo quindi moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per \bar{z} , ricordando che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, otteniamo

$$z = i\frac{y}{9z} \iff 9z^2 = iy.$$

Scrivendo $z = x + iy$ ed uguagliando parti reali e immaginarie a zero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y(18x - 1) = 0 \end{cases}$$

che ha tre soluzioni: $z_0 = 0$ (che non è compatibile con il campo di esistenza) e le due soluzioni $z_{1,2} = \frac{1}{18} \pm \frac{i}{18}$ che sono le sole soluzioni del problema e che hanno la rappresentazione in \mathbb{C}

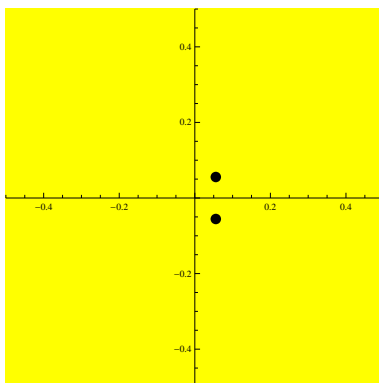


Figure 4: Le soluzioni dell'equazione $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|3z|^2}i$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \ln(n^2) + 6 \sin n}.$$

Svolgimento. Vediamo prima la convergenza assoluta usando il criteri del rapporto.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{2(n+1) \log(n+1) + 6 \sin(n+1)} \frac{2n \log n + 6 \sin n}{|x|^n} \rightarrow |x| \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; per $|x| > 1$ la serie non converge (perché il termine n -esimo non è infinitesimo).

Per $x = 1$ la serie è a termini positivi e il termine n -esimo è asintotico a $\frac{1}{2n \log n}$ che dá una serie divergente. Quindi la serie diverge.

Per $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{1}{2n \log n + 6 \sin n} > 0$ definitivamente inoltre $a_n \rightarrow 0$. La serie non converge assolutamente per l'argomento del caso $x = 1$. Per poter applicare il criterio di Leibniz per stabilire la convergenza semplice resta solo da controllare che a_n sia definitivamente decrescente. Infatti, la funzione $f(x) = \frac{1}{2x \log x + 6 \sin x}$ ha derivata $f'(x) = \frac{-2 \log x - 2 + 6 \cos x}{(2x \log x + 6 \sin x)^2}$ che è definitivamente negativa per $x \rightarrow \infty$. Quindi la serie converge semplicemente.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{3\alpha}}{1 - \sin x} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[*Suggerimento:* Si ricordi che $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Svolgimento.

(a) Poniamo $1 - \sin x = t$ da cui $-\cos x dx = dt$, l'integrale diventa

$$-\int_1^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = \log t \Big|_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = \log \left(\frac{2}{2-\sqrt{3}} \right) = \log(4 + 2\sqrt{3})$$

(b) In un intorno destro di zero la funzione è limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'unico punto problematico è $\frac{\pi}{2}$. Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$ e usiamo il suggerimento per ottenere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)^{3\alpha}}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3\alpha} t}{1 - \cos t} dt$$

Ora il problema si è spostato nel punto 0. Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin riportati otteniamo che la funzione integranda per $x \rightarrow 0^+$ è asintotica a $\frac{2}{t^{-3\alpha+2}}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-3\alpha + 2 < 1$ cioè $\alpha > \frac{1}{3}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 22.01.2024

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{4x^2 - 1}{x}\right)$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a) La funzione è definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il segno è determinato dal segno dell'argomento dell'arctan. Si vede facilmente che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Inoltre la funzione è dispari sempre perché il suo segno dipende da quello dell'argomento dell'arctan e perché l'arctan è dispari.

(b) Vediamo i limiti notevoli. È facile vedere che:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) &= \mp \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \pm \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro, mentre $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.

(c) Nel dominio D la funzione è continua e derivabile. Calcoliamo la derivata per $x \in D$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{4x^2 - 1}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot 8x - (4x^2 - 1)}{x^2} = \frac{4x^2 + 1}{x^2 + (4x^2 - 1)^2}$$

Si vede immediatamente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Quindi la funzione risulta strettamente monotona crescente su ogni intervallo contenuto in D . La funzione non assume né massimo né minimo ed ha:

$$\inf_D f = -\pi/2, \quad \sup_D f = \pi/2.$$

Si possono controllare gli attacchi della derivata destra e sinistra in 0. Si ha immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = 1$$

(d) Il grafico della funzione segue:

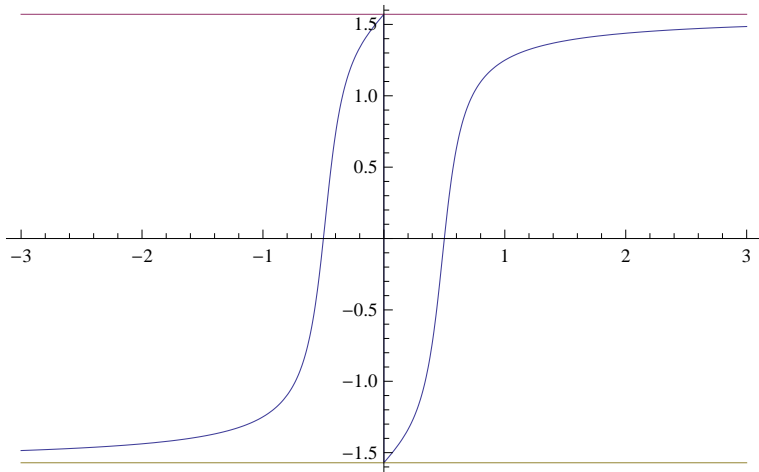


Figure 5: La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{4x^2-1}{x}\right)$

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2}i.$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. L'equazione è definita per ogni $z \neq 0$. Possiamo quindi moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per z , ricordando che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, otteniamo

$$\bar{z} = i\frac{y}{\bar{z}} \iff \bar{z}^2 = iy.$$

Scrivendo $z = x + iy$ ed uguagliando parti reali e immaginarie a zero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

che ha tre soluzioni: $z_0 = 0$ (che non è compatibile con il campo di esistenza) e $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$ che sono le sole soluzioni del problema e che hanno la seguente rappresentazione in \mathbb{C}

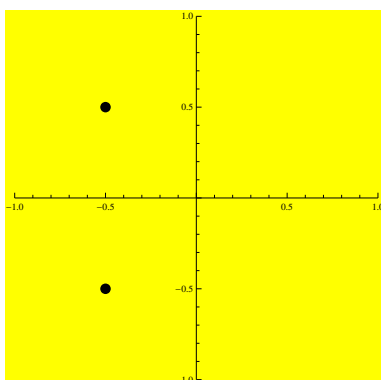


Figure 6: Le soluzioni dell'equazione $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2}i$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n \ln n + 3 \cos n}.$$

Svolgimento. Vediamo prima la convergenza assoluta usando il criteri del rapporto.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|2x|^{n+1}}{(n+1) \log(n+1) + 3 \cos(n+1)} \frac{n \log n + 3 \cos n}{|2x|^n} \rightarrow |2x| \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Quindi per $|x| < \frac{1}{2}$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; per $|x| > \frac{1}{2}$ la serie non converge (perché il termine n -esimo non è infinitesimo).

Per $x = \frac{1}{2}$ la serie è a termini positivi e il termine n -esimo è asintotico a $\frac{1}{n \log n}$ che dá una serie divergente. Quindi la serie diverge.

Per $x = -1/2$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{1}{n \log n + 3 \cos n} > 0$ definitivamente inoltre $a_n \rightarrow 0$. La serie non converge assolutamente per l'argomento del caso $x = 1/2$. Per poter applicare il criterio di Leibniz per stabilire la convergenza semplice, resta solo da controllare che a_n sia definitivamente decrescente. Infatti, la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log x + 3 \cos x}$ ha derivata $f'(x) = \frac{-\log x - 1 - 3 \sin x}{(x \log x + 3 \cos x)^2}$ che è definitivamente negativa per $x \rightarrow \infty$. Quindi la serie converge semplicemente.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^\alpha}{1 - \sin x} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[*Suggerimento:* Si ricordi che $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Svolgimento.

(a) Poniamo $1 - \sin x = t$ da cui $-\cos x dx = dt$, l'integrale diventa

$$-\int_1^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = \log t \Big|_{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \log \left(\frac{2}{2-\sqrt{2}} \right) = \log(2 + \sqrt{2})$$

(b) In un intorno destro di zero la funzione è limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'unico punto problematico è $\frac{\pi}{2}$. Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$ e usiamo il suggerimento per ottenere

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)^\alpha}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1 - \cos t} dt$$

Ora il problema si è spostato nel punto 0. Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin riportati otteniamo che la funzione integranda per $x \rightarrow 0^+$ è asintotica a $\frac{2}{t^{-\alpha+2}}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-\alpha + 2 < 1$ cioè $\alpha > 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 22.01.2024

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 9}{x}\right)$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a) La funzione è definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il segno è determinato dal segno dell'argomento dell'arctan. Si vede facilmente che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$. Inoltre la funzione è dispari sempre perché il suo segno dipende da quello dell'argomento dell'arctan e perché l'arctan è dispari.

(b) Vediamo i limiti notevoli. È facile vedere che:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) &= \mp \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \pm \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro, mentre $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.

(c) Nel dominio D la funzione è continua e derivabile. Calcoliamo la derivata per $x \in D$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-9}{x}\right)^2} \frac{x \cdot 2x - (x^2 - 9)}{x^2} = \frac{x^2 + 9}{x^2 + (x^2 - 9)^2}$$

Si vede immediatamente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Quindi la funzione risulta strettamente monotona crescente su ogni intervallo contenuto in D . La funzione non assume né massimo né minimo ed ha:

$$\inf_D f = -\pi/2, \quad \sup_D f = \pi/2.$$

Si possono controllare gli attacchi della derivata destra e sinistra in 0. Si ha immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \frac{1}{9}$$

(d) Il grafico della funzione segue:

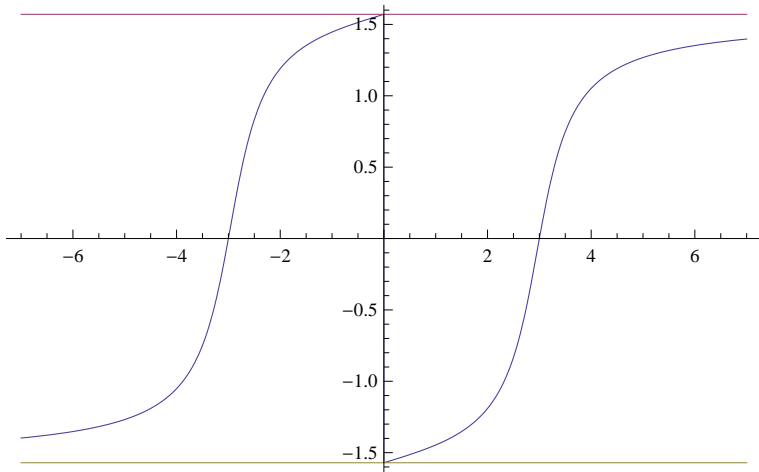


Figure 7: La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-9}{x}\right)$

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\operatorname{Im}(2\bar{z})}{|z|^2}i.$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. L'equazione è definita per ogni $z \neq 0$. Possiamo quindi moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per \bar{z} , ricordando che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, otteniamo

$$z = -2i \frac{y}{z} \iff z^2 = -2iy.$$

Scrivendo $z = x + iy$ ed uguagliando parti reali e immaginarie a zero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y(x + 1) = 0 \end{cases}$$

che ha tre soluzioni: $z_0 = 0$ (che non è compatibile con il campo di esistenza) e $z_{1,2} = -1 \pm i$ che sono le sole soluzioni del problema e che hanno la seguente rappresentazione in \mathbb{C}

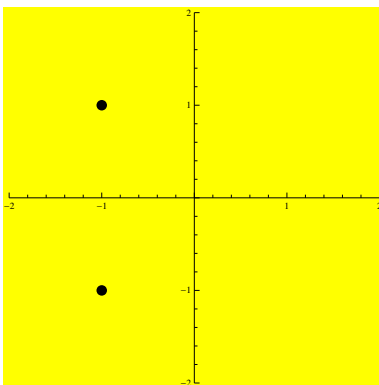


Figure 8: Le soluzioni dell'equazione $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\operatorname{Im}(2\bar{z})}{|z|^2}i$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \ln n + 5 \sin n}.$$

Correzione es.3 Vediamo prima la convergenza assoluta usando il criteri del rapporto.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1) \log(n+1) + 5 \sin(n+1)} \frac{n \log n + 5 \sin n}{|x|^n} \rightarrow |x| \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; per $|x| > 1$ la serie non converge (perché il termine n -esimo non è infinitesimo).

Per $x = 1$ la serie è a termini positivi e il termine n -esimo è asintotico a $\frac{1}{n \log n}$ che dá una serie divergente. Quindi la serie diverge.

Per $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{1}{n \log n + 5 \sin n} > 0$ definitivamente inoltre $a_n \rightarrow 0$. La serie non converge assolutamente per l'argomento del caso $x = 1$. Per poter applicare il criterio di Leibniz per la convergenza semplice, resta solo da controllare che a_n sia definitivamente decrescente. Infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log x + 5 \sin x}$ ha derivata $f'(x) = \frac{0 \log x - 1 - 5 \cos x}{(x \log x + 5 \sin x)^2}$ che è definitivamente negativa per $x \rightarrow \infty$. Quindi la serie converge semplicemente.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{\alpha+1}}{1 - \sin x} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[*Suggerimento*: Si ricordi che $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Svolgimento.

(a) Poniamo $1 - \sin x = t$ da cui $-\cos x dx = dt$, l'integrale diventa

$$-\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \log t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \log 2$$

(b) In un intorno destro di zero la funzione è limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'unico punto problematico è $\frac{\pi}{2}$. Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$ e usiamo il suggerimento per ottenere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)^{\alpha+1}}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\alpha+1} t}{1 - \cos t} dt$$

Ora il problema si è spostato nel punto 0. Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin riportati otteniamo che la funzione integranda per $x \rightarrow 0^+$ è asintotica a $\frac{2}{t^{-\alpha-1+2}}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-\alpha + 1 < 1$ cioè $\alpha > 0$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).