PROGRAMMA del corso di Analisi Matematica 1

Ingegneria biomedica, Canale 2
docente: Claudio Marchi
a.a. 2023-2024

Testi Consigliati:
"Analisi Matematica 1, teoria e applicazioni", A. Marson, P. Baiti, F. Ancona & B. Rubino, Carocci Editore.
"Analisi Matematica 1", M. Bramanti, C.D. Pagani & S. Salsa, Zanichelli Editore.
"Analisi Matematica 1", A. Languasco, Hoepli Editore.
"Analisi Matematica 1", M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, Mc Graw Hill Editore.
Dispensa a cura dei docenti, contenente i temi d'esame svolti ed altri esercizi.
Complementi in rete sulle pagine web dei docenti; in particolare i file pdf delle singole lezioni sulla piattaforma `stem.elearning.unipd.it`.

Legenda: con il simbolo "(**D**)" si intende che la dimostrazione dell'enunciato è da considerarsi di base mentre con il simbolo "(d)" si intende che la dimostrazione dell'enunciato è ritenuta più difficile. Le restanti dimostrazioni non sono richieste.

1 Elementi introduttivi

1.1 Logica elementare, sommatorie, principio di induzione

- Quantificatori. Negazione di proposizioni con quantificatori.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Principio di induzione (d). Formula della progressione geometrica (**D**). Formula della progressione telescopica (d).
- Fattoriale. Coefficienti binomiali e loro proprietà. Formula del binomio di Newton (d).

1.2 Elementi di teoria degli insiemi, insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Prodotto cartesiano di insiemi. Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato. $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (d). I numeri reali come allineamenti decimali.
- L'insieme $\mathbb{R}$. Teorema di completezza. Simboli "$+\infty$" e "$-\infty$", retta reale estesa.
- Definizione di modulo o valore assoluto; disuguaglianza triangolare.
- Insiemi limitati, superiormente o inferiormente limitati. Definizione di: maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore. Unicità del massimo e del minimo (**D**). Caratterizzazione dell'estremo superiore/inferiore.
- Radicali ed esponenti a potenza reale, logaritmi.

1.3 Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi

- I numeri complessi; la loro forma algebrica e le loro operazioni. $\mathbb{C}$ è un campo (**D**). Coniugato di un complesso e sue proprietà (**D**). Teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze. Un polinomio a coefficienti reali ammette solo zeri reali e zeri con parte immaginaria non nulla a due a due coniugati tra loro. Teorema di decomposizione in fattori irriducibili di un polinomio a coefficenti reali (d).
- Piano di Gauss. Modulo e sue proprietà (**D**). Disuguaglianza triangolare su $\mathbb{C}$ (d). Argomento e sue proprietà (**D**). Forma trigonometrica dei complessi. Formule di De Moivre (**D**). Formula di Eulero. Proprietà degli esponenziali con esponente complesso (d). Forma esponenziale dei complessi. Radici n-esime di un complesso (**D**).; equazioni di secondo grado con coefficienti complessi.

2 Funzioni

- Definizione di funzione. Dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni elementari. Immagine e controimmagine di insiemi tramite una funzione. Composizione di funzioni. Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa. Funzione invertibile su un insieme. Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche. Funzioni monotone.

- Funzioni iperboliche e loro proprietà (d); funzioni iperboliche inverse e loro formula (d). Funzioni trigonometriche e loro inverse. Funzione "parte intera", funzione "mantissa", funzione di Dirichlet.

- Funzioni limitate ed illimitate. Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una funzione. Punti di estremo di una funzione. Estremi ed estremanti.

3 Limiti di funzioni

- Intorni sferici. Intersezione di intorni è un intorno (**D**). Proprietà di separazione (**D**). Definizione di punto di accumulazione di un insieme. Punto isolato di un insieme. Proprietà verificate definitivamente.

- Definizione di limite di una funzione nelle sue varie formulazioni. Esempi di limiti calcolati usando la definizione (**D**). Teorema di unicità del limite (**D**). Limite finito implica locale limitatezza (**D**).

- Punto di accumulazione destro e sinistro di un insieme. Definizione di limite destro e di limite sinistro di una funzione. Relazione tra limite ed i limiti destro e sinistro.

- Relazione tra limite di una funzione e limite del suo modulo (d). Teorema della permanenza del segno (**D**) e suo corollario (**D**). Teorema dei carabinieri (**D**). Limiti al finito della funzione $\sin x$ (d). Limite notevole $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (d). Teorema sull'algebra dei limiti (**D**). Forme indeterminate. Teorema sull'algebra estesa dei limiti. Teorema del confronto (**D**). Teorema del cambio di variabile. Teorema sul limite di funzioni monotone. Limiti delle principali funzioni elementari. Limiti notevoli derivanti da $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (d).

- Definizione del numero di Nepero "e"; limiti notevoli conseguenti (d).

- Asintoticità di due funzioni: simbolo "$\sim$". Il simbolo "o-piccolo" e la sua algebra. Relazione tra asintoticità ed o-piccolo (d). Cambio di variabile negli sviluppi. Teorema sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti. Gerarchia degli infiniti. Il simbolo "O-grande". Ordine di infinito e di infinitesimo. Ordine di infinito e di infinitesimo rispetto ad una funzione-campione.

4 Successioni

- Successioni. Proprietà verificate definitivamente da una successione. Definizione di limite di una successione. Successioni convergenti, divergenti, infinitesime, indeterminate, monotone. Una successione è definitivamente limitata se e solo se è limitata (**D**). Una successione convergente è limitata (**D**).

- Teorema dell'unicità del limite, relazione tra limite e modulo, teorema sull'algebra dei limiti, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei carabinieri, caratterizzazione del limite per le successioni monotone.

- Gerarchia degli infiniti per le successioni.

- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è una successione convergente.

- Sottosuccessioni. Una successione ha limite l se e solo se tutte le sue sottosuccessioni hanno limite l. Teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni. Teorema-ponte.

5 Serie

- Definizione di somme parziali. Definizione di serie convergente, divergente, regolare ed irregolare (indeterminata). Serie geometrica e suo carattere (**D**). Serie di Mengoli e suo carattere (**D**).

- Carattere della somma di serie convergenti e del prodotto di una serie regolare per una costante. Coda di una serie. Limite del termine generale di una serie convergente (cioè condizione necessaria per la convergenza di una serie) (**D**). Possibili caratteri di una serie con termini di segno definitivamente costante (**D**). Serie assolutamente convergenti. Convergenza assoluta implica convergenza semplice (**D**). Criterio di condensazione. Carattere della serie armonica (**D**). Carattere della serie armonica generalizzata (**D**). Carattere della serie di termine $a_k = [k^\alpha \log^\beta k]^{-1}$ (d). Criterio del confronto e corrispondente criterio asintotico. Criterio del rapporto (**D**) e corrispondente criterio asintotico (**D**). Criterio della radice (**D**) e corrispondente criterio asintotico. Relazione tra il limite nel criterio del rapporto asintotico e quello nel criterio della radice asintotico. Criterio di Leibniz.

6 Funzioni continue di una variabile reale

- Definizione di funzione continua. Continuità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni continue. Teorema della definitiva limitatezza, teorema della permanenza del segno e teorema del cambio di variabili, tutti per funzioni continue. Continuità della composizione di funzioni continue. Teorema-ponte per funzioni continue.

- Punti di discontinuità eliminabile, di discontinuità di prima e seconda specie. Prolungamento per continuità.

- Teorema di Weierstrass. Teorema di Bolzano o degli zeri (**D**). Teorema dei valori intermedi (**D**). Teorema: se f è continua su un intervallo, allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Teorema sulla continuità della funzione inversa. Continuità delle funzioni elementari e delle principali funzioni inverse.

7 Calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale

- Definizione di derivata prima di una funzione e di funzione derivabile. Calcolo della derivata di alcune funzioni elementari (**D**). Interpretazione geometrica della derivata. Rapporto incrementale di una funzione in un punto. Migliore approssimazione lineare di una funzione. Retta tangente al grafico di una funzione. Continuità di una funzione derivabile (**D**). Classificazione dei punti di non derivabilità: punti angolosi, flessi a tangente verticale e cuspidi. Derivata destra e derivata sinistra. Legame tra derivabilità e derivabilità da destra e da sinistra.

- Teorema sull'algebra delle derivate (derivata della somma, del prodotto e del quozionte di funzioni derivabili) (**D**). Derivata della funzione composta (d). Una funzione pari ha derivata dispari e una dispari ha derivata pari. Derivata della funzione inversa di una funzione invertibile e derivabile (d). Calcolo delle derivate delle inverse delle principali funzioni elementari (d).

- Funzione derivata. Derivate successive. Funzioni di classe $C^{(n)}$.

- Teorema di Fermat (**D**). Teorema di Rolle (**D**). Teorema di Lagrange (**D**). Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (**D**). Teorema di Cauchy. Legame tra monotonia e derivata prima (**D**; solo per funzioni monotone). Teorema di de l'Hôpital. (d, solo nel caso di $\frac{0}{0}$ in un punto di $\mathbb{R}$). Teorema sulla relazione tra derivata destra/sinistra e limite destro/sinistro della derivata (d).

- Funzioni convesse e concave. Monotonia della derivata prima di una funzione derivabile convessa o concava. Legame tra segno della derivata seconda e convessità/concavità. Punti di flesso. Legame tra zeri della derivata seconda e punti di flesso. Studio della natura dei punti critici con la derivata seconda.

- Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui di una funzione. Criterio per l'individuazione degli asintoti obliqui.

- Studi di funzione.
- Polinomi di Taylor e di Mc Laurin. Principali proprietà dei polinomi di Taylor. Teorema di Peano. Sviluppi delle principali funzioni elementari. Calcolo dei limiti mediante gli sviluppi.
- Complementi di teoria. Teorema sulla formula di Taylor con resto di Lagrange. Serie di Taylor. Funzioni sviluppabili in serie di Taylor. Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor.

8 Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale

- Partizioni di un intervallo. Norma di una partizione. Somma inferiore e superiore di Riemann. Relative proprietà.
- Definizione di funzione integrabile secondo Cauchy-Riemann su un intervallo e proprietà equivalenti. Integrale definito di una funzione e sua interpretazione geometrica. Esempi di funzioni integrabili (d). Non integrabilità della funzione di Dirichlet (d).
- Linearità dell'integrale. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Monotonia. Disuguaglianza sull'integrale del modulo di una funzione integrabile.
- Integrabilità delle funzioni monotone (d, su $[0,1]$) e delle funzioni continue a tratti. Integrabilità delle principali funzioni elementari (d).
- Teorema della media integrale (**D**); relativa interpretazione geometrica.
- Primitiva di una funzione. Integrale indefinito di una funzione. Teorema fondamentale del calcolo integrale (**D**). Integrali immediati. Derivata di una funzione integrale.
- Integrazione per sostituzione (**D**). Integrazione per parti (**D**). Sostituzioni classiche/canoniche per alcune classi di funzioni integrande.
- Integrazione di alcune funzioni razionali fratte (dimostrazione per denominatori di grado ≤ 2 : **D**; dimostrazione per denominatori di grado 3 : (d)) o integrali ad esse riconducibili.
- Funzioni integrabili in senso improprio; integrali in senso improprio o generalizzato. Assoluta integrabilità. Assoluta integrabilità implica integrabilità. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Integrabilità di $1/[x^\alpha |\ln x|^\beta]$ su $(0,1/2]$ e su $[2,+\infty)$ (d).