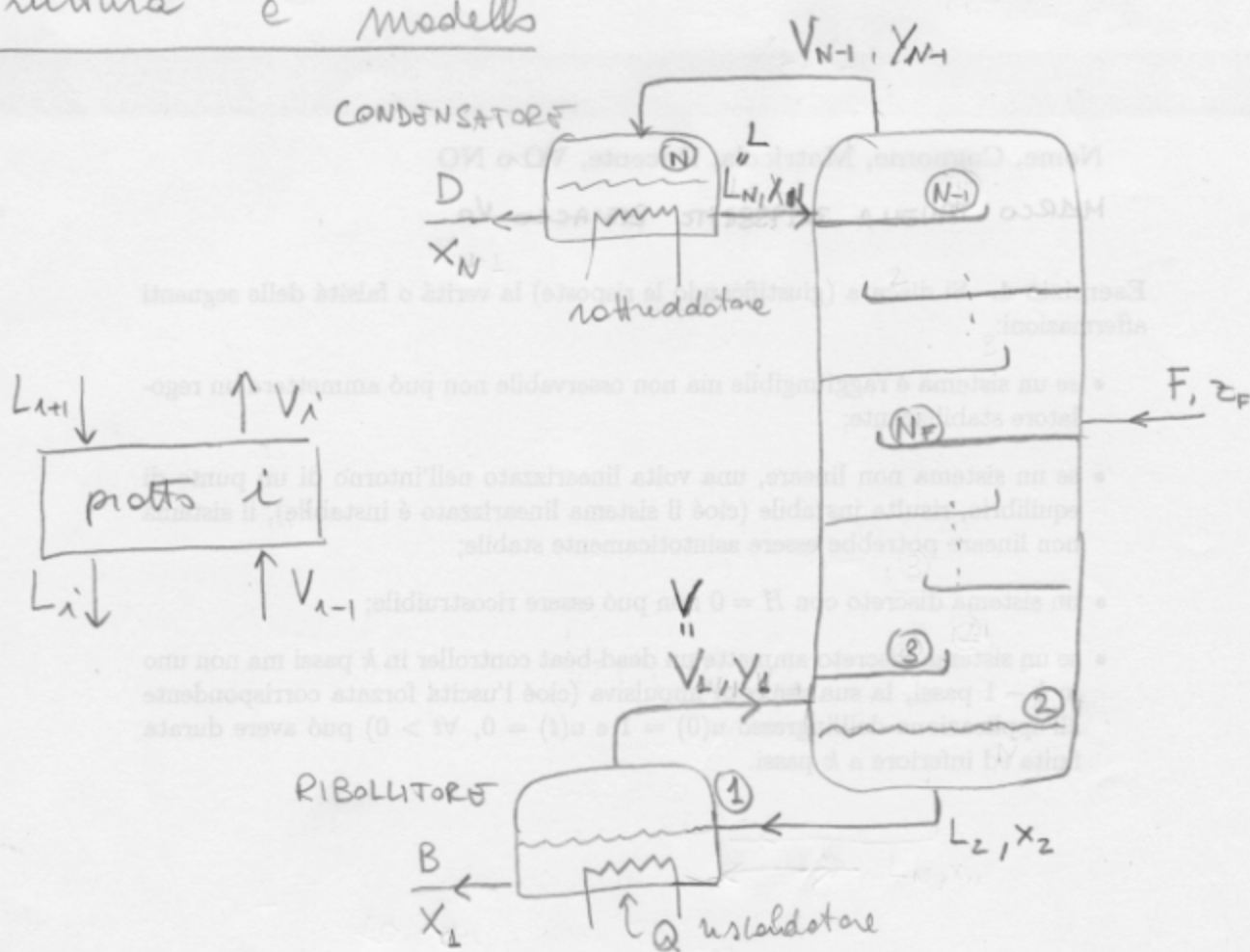


COLONNA DI DISTILLAZIONE

Struttura e modelli



Varieabili

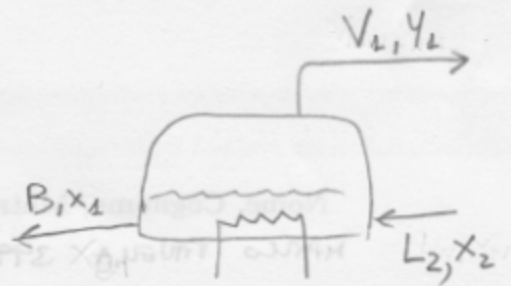
- $F(t)$ flusso di alimentazione (mol/min) nel piatto di alimentazione numero N_F
- q_F frazione liquida di alimentazione (ipotisi $q_F = 1$)
- $D(t)$ flusso di distillato (mol/min) nel condensatore
- $X_{N-1}(t)$ frazione della componente più volatile nel condensatore
- $B(t)$ flusso di residuo (mol/min) nel ribollitore
- $X_1(t)$ frazione della componente più volatile nel residuo
- $z_F(t)$ frazione della componente più volatile nel flusso di alimentazione (liquido)

Equazioni di Bilancio di massa

RIBOLLITORE ($P_{\text{piatto}}=1$)

$$\frac{d}{dt} M_1(t) = L_2 - V_1 - B$$

$$\frac{d}{dt} (x_1 M_1(t)) = L_2 x_2 - V_1 y_1 - B x_1$$



dove M_1 massa ^{liquida totale} nel ribollitore

L_2 flusso (mol/min) liquido dal piatto 2

V_1 flusso (mol/min) vapore al piatto 2

B flusso (mol/min) di residuo

$x_1(t)$ frazione della componente più volatile (liquida) nel residuo

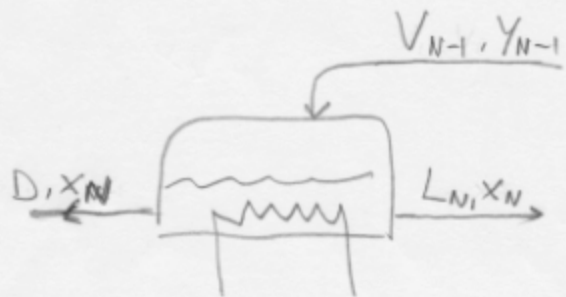
$x_2(t)$ frazione della componente più volatile (liquida) dal piatto 2

$y_1(t)$ frazione della componente più volatile (vapore) verso il piatto 2

CONDENSATORE ($P_{\text{piatto}}=N$)

$$\frac{d}{dt} M_N = V_{N-1} - L_N - D$$

$$\frac{d}{dt} (x_N M_N) = V_{N-1} y_{N-1} - L_N x_N - D x_N$$

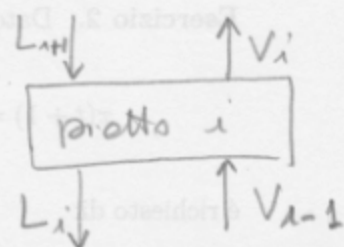
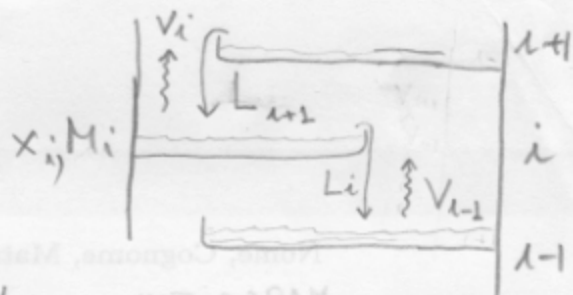


M_N massa liquida totale nel condensatore

PIATTO i $i \neq N_F$

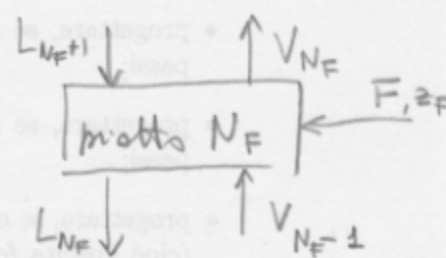
$$\frac{d}{dt} M_i = L_{i+1} - L_i + V_{i-1} - V_i$$

$$\frac{d}{dt} (x_i M_i) = L_{i+1} x_{i+1} - L_i x_i + V_{i-1} y_{i-1} - V_i y_i$$



PIATTO $i = N_F$

$$\frac{d}{dt} M_{N_F} = L_{N_F+1} - L_{N_F} + V_{N_F-1} - V_{N_F} + F$$



$$\frac{d}{dt} (x_{N_F} M_{N_F}) = L_{N_F+1} x_{N_F+1} - L_{N_F} x_{N_F} + V_{N_F-1} y_{N_F-1} - V_{N_F} y_{N_F} + z_F F$$

dove

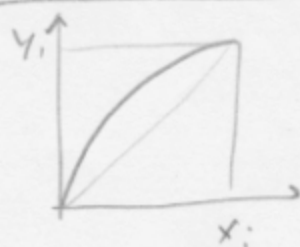
$F(t)$ flusso di alimentazione (mol/min) (liquido)

$z_F(t)$ frazione della componente più volatile nel flusso di alimentazione (liquido)

Modello non lineare con stati $M_1, \dots, M_N, x_1, \dots, x_N$ e variabili libere $y_1, \dots, y_N, V_1, \dots, V_{N-1}, L_1, \dots, L_N, B, D, F, q_F, z_F$. In realtà le variabili libere sono solo 7.

1) Noto che $y_i = F(x_i)$

$$= \frac{\alpha x_i}{1 + (1-\alpha)x_i}$$



quindi y_i vengono eliminate (3)

2) Per quanto riguarda $L_2, L_3, \dots, L_N$

si ha che tali flussi dipendono dalle

quantità di liquido
presente nel piatto

e del flusso di vapore

che proviene dal piatto (sono bolle nel piatto)

sovrastante. In questi casi una funzione

$$L_i = f_i(M_i, V_{i-1})$$

$$i = 2, \dots, N-1$$

Solo L_N è una variabile di ingresso
manipolabile e lo denso $L_N \triangleq L$.

Abbiamo così eliminato $L_2, \dots, L_{N-1}$

Restano le variabili

$$B, D, F, q_F, z_F, L, V_1, \dots, V_{N-1}$$

3) La dinamica delle variabili V_i dipende
dalla dinamica energetica del sistema che è
molto complessa in generale. Tuttavia, poiché
la dinamica energetica è più rapida si può dimostrare
che il seguente modello per V_i è abbastanza accurato

$$V_1 = V_2 = \dots = V_{N_F-1} = V$$

dove V è una variabile
di ingresso manipolabile

$$V_{N_F} = V_{N_F+1} = \dots = V_{N-1} = V + (1 - q_F)F$$

Quindi abbiamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= L_2 - V_1 - B = f_2(M_2, V) - V - B \\ \frac{dM_2}{dt} &= L_3 - L_2 + \cancel{V_1} - \cancel{V_2} = f_3(M_3, V) - f_2(M_2, V) \\ \frac{dM_3}{dt} &= L_4 - L_3 + \cancel{V_2} - \cancel{V_3} = f_4(M_4, V) - f_3(M_3, V) \\ &\vdots \\ \frac{dM_{N_F-1}}{dt} &= L_{N_F} - L_{N_F-1} + \cancel{V_{N_F-2}} - \cancel{V_{N_F-1}} = f_{N_F}(M_{N_F}, V + (1-q_F)F) - f_{N_F-1}(M_{N_F-1}, V) \\ \frac{dM_{N_F}}{dt} &= L_{N_F+1} - L_{N_F} + V_{N_F-1} - V_{N_F} + F = f_{N_F+1}(M_{N_F+1}, V + (1-q_F)F) - f_{N_F}(M_{N_F}, V + (1-q_F)V) \\ &\quad + q_F F \\ \frac{dM_{N_F+1}}{dt} &= L_{N_F+2} - L_{N_F+1} + \cancel{V_{N_F}} - \cancel{V_{N_F+1}} = f_{N_F+2}(M_{N_F+2}, V + (1-q_F)F) - f_{N_F+1}(M_{N_F+1}, V + (1-q_F)F) \\ &\vdots \\ \frac{dM_{N-1}}{dt} &= L_N - L_{N-1} - \cancel{V_{N-2}} - \cancel{V_{N-1}} = L - f_{N-1}(M_{N-1}, V + (1-q_F)F) \\ \frac{dM_N}{dt} &= -L_N + V_{N-1} - D = -L + V + (1-q_F)F - D \end{aligned}$$

Dove

$$L_\lambda = f_\lambda(M_\lambda, V) \quad \lambda = 2, \dots, N_F-1$$

$$L_\lambda = f_\lambda(M_\lambda, V + (1-q_F)F) \quad \lambda = N_F, \dots, N-1$$

$$L_1 = L \quad \lambda = N$$

Stati $M_1, \dots, M_N$, ingressi V, L, D, B, F, q_F

Evoluzione di equilibrio

Fissati i valori nominali $\bar{M}_2, \dots, \bar{M}_N, \bar{V}, \bar{L}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{F}, \bar{q}_F$ tali che

$$0 = \bar{L}_2 - \bar{V} - \bar{B}$$

$$0 = \bar{L}_3 - \bar{L}_2$$

$$0 = \bar{L}_4 - \bar{L}_3$$

$$\vdots$$

$$0 = \bar{L}_{N_F} - \bar{L}_{N_F-1}$$

$$0 = \bar{L}_{N_F+1} - \bar{L}_{N_F} + \bar{q}_F \bar{F}$$

$$0 = \bar{L}_{N_F+2} - \bar{L}_{N_F+1}$$

$$\vdots$$

$$0 = \bar{L}_1 - \bar{L}_{N-1}$$

$$0 = -\bar{L} + \bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F} - \bar{D}$$

dove $\bar{L}_\lambda = f_\lambda(\bar{M}_\lambda, \bar{V}) \quad \lambda = 2, \dots, N_F - 1$

$$\bar{L}_\lambda = f_\lambda(\bar{M}_\lambda, \bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) \quad \lambda = N_F, \dots, N - 1$$

Si ottiene

$$\bar{V} + \bar{B} = \bar{L}_2 = \bar{L}_3 = \bar{L}_4 = \dots = \bar{L}_{N_F}$$

$$\bar{q}_F \bar{F} + \bar{V} + \bar{B} = \bar{L}_{N_F+1} = \bar{L}_{N_F+2} = \dots = \bar{L}_1 = \bar{L} = \bar{V} - \bar{D} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}$$

Da cui segue che $\begin{cases} \bar{F} = \bar{D} + \bar{B} \\ \bar{L} + \bar{q}_F \bar{F} = \bar{V} + \bar{B} \end{cases}$ quindi c'è un vincolo sugli input F, D, B, L, V nominali.

$$\bar{V} + \bar{B} = \bar{L} + \bar{F} = \bar{L} + \bar{D} + \bar{B}$$

Quindi scegli i valori nominali degli ingressi

$\bar{V}, \bar{L}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{F}, \bar{q}_F$ tali che
$$\begin{cases} \bar{F} = \bar{D} + \bar{B} \\ \bar{L} + \bar{q}_F \bar{F} = \bar{V} + \bar{B} \end{cases}$$
 e determinino gli stati di equilibrio $\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_N$ risolvendo le equazioni

$$f_i(\bar{M}_1, \bar{V}) = \bar{L} + \bar{q}_F \bar{F} \quad i = 2, \dots, N_F - 1$$

$$f_{N_F}(\bar{M}_{N_F}, \bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) = \bar{L} + \bar{q}_F \bar{F} \quad i = N_F$$

$$f_i(\bar{M}_1, \bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) = \bar{L} \quad i = N_F + 1, \dots, N - 1$$

Con queste equazioni si trovano solo $\bar{M}_2, \dots, \bar{M}_{N-1}$ mentre $\bar{M}_1, \bar{M}_N$ restano liberi.

Una volta determinati $\bar{M}_2, \dots, \bar{M}_N$, si possono linearizzare le $f_i(\dots)$ attorno ai valori nominali

$$f_i(M_i, V) \approx f_i(\bar{M}_i, \bar{V}) + \alpha_i \tilde{M}_i + \beta_i \tilde{V} \quad i = 2, \dots, N_F - 1$$

$$f_i(M_i, V + (1 - q_F) F) \approx f_i(\bar{M}_i, \bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) + \alpha_i \tilde{M}_i + \beta_i (\tilde{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F})$$

$$i = N_F, \dots, N - 1$$

dove $\tilde{M}_i \triangleq M_i - \bar{M}_i$

$$\tilde{V} \triangleq V - \bar{V}$$

$$(1 - \tilde{q}_F) F \triangleq (1 - q_F) F - (1 - \bar{q}_F) \bar{F}$$

Se effettuiamo la linearizzazione

$$\frac{d\tilde{M}_1}{dt} = \alpha_2 \tilde{M}_2 + \beta_2 \tilde{V} - \tilde{V} - \tilde{B}$$

$$\frac{d\tilde{M}_2}{dt} = \alpha_3 \tilde{M}_3 - \alpha_2 \tilde{M}_2 + (\beta_3 - \beta_2) \tilde{V}$$

$$\frac{d\tilde{M}_3}{dt} = \alpha_4 \tilde{M}_4 - \alpha_3 \tilde{M}_3 + (\beta_4 - \beta_3) \tilde{V}$$

⋮

$$\frac{d\tilde{M}_{N_F-1}}{dt} = \alpha_{N_F} \tilde{M}_{N_F} - \alpha_{N_F-1} \tilde{M}_{N_F-1} + (\beta_{N_F} - \beta_{N_F-1}) \tilde{V} + \beta_{N_F} (1 - q_F) F$$

$$\frac{d\tilde{M}_{N_F}}{dt} = \alpha_{N_F+1} \tilde{M}_{N_F+1} - \alpha_{N_F} \tilde{M}_{N_F} + (\beta_{N_F+1} - \beta_{N_F}) (\tilde{V} + (1 - q_F) F) + q_F F$$

$$\frac{d\tilde{M}_{N_F+1}}{dt} = \alpha_{N_F+2} \tilde{M}_{N_F+2} - \alpha_{N_F+1} \tilde{M}_{N_F+1} + (\beta_{N_F+2} - \beta_{N_F+1}) (\tilde{V} + (1 - q_F) F)$$

$$\frac{d\tilde{M}_{N-1}}{dt} = -\alpha_{N-1} \tilde{M}_{N-1} - \beta_{N-1} (\tilde{V} + (1 - q_F) F) + \tilde{L}$$

$$\frac{d\tilde{M}_N}{dt} = -\tilde{L} + \tilde{V} + (1 - q_F) F - \tilde{D}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{M}_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{M}_N}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{22}} \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \vdots \\ \tilde{M}_N \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \vdots \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Noto che A_{22} ha 2 colonne nulle
 e quindi ha 2 autovalori nulli
 (doppio interpretare)

$$\frac{d(x_1 M_1)}{dt} = L_2 X_2 - V Y_1 - B X_1 \quad \left(\text{consideriamo ora le altre equazioni del modello} \right)$$

$$\frac{d(x_2 M_2)}{dt} = L_3 X_3 - L_2 X_2 + V(Y_1 - Y_2)$$

$$\frac{d(x_3 M_3)}{dt} = L_4 X_4 - L_3 X_3 + V(Y_2 - Y_3)$$

$\vdots$

$$\frac{d(x_{N_F-1} M_{N_F-1})}{dt} = L_{N_F} X_{N_F} - L_{N_F-1} X_{N_F-1} + V(Y_{N_F-2} - Y_{N_F-1})$$

$$\frac{d(x_{N_F} M_{N_F})}{dt} = L_{N_F+1} X_{N_F+1} - L_{N_F} X_{N_F} + V Y_{N_F-1} - (V + (1-q_F)F) Y_{N_F} + z_F F$$

$$\frac{d(x_{N_F+1} M_{N_F+1})}{dt} = L_{N_F+2} X_{N_F+2} - L_{N_F+1} X_{N_F+1} + (V + (1-q_F)F)(Y_{N_F} - Y_{N_F+1})$$

$\vdots$

$$\frac{d(x_{N-1} M_{N-1})}{dt} = L_N X_N - L_{N-1} X_{N-1} + (V + (1-q_F)F)(Y_{N-2} - Y_{N-1})$$

$$\frac{d(x_N M_N)}{dt} = -L_N X_N + (V + (1-q_F)F) Y_{N-1} - D X_N$$

dove $L_i = f_i(M_i, V) \quad i = 2, \dots, N_F-1$

$L_i = f_i(M_i, V + (1-q_F)F) \quad i = N_F, \dots, N-1$

$Y_i = F(x_i)$

In equilibrio abbiamo

$$0 = \bar{L}_2 \bar{X}_2 - \bar{V} \bar{Y}_1 - \bar{B} \bar{X}_1$$

$$0 = \bar{L}_3 \bar{X}_3 - \bar{L}_2 \bar{X}_2 + \bar{V}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)$$

$$0 = \bar{L}_4 \bar{X}_4 - \bar{L}_3 \bar{X}_3 + \bar{V}(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3)$$

⋮

$$0 = \bar{L}_{N_F} \bar{X}_{N_F} - \bar{L}_{N_F-1} \bar{X}_{N_F-1} + \bar{V}(\bar{Y}_{N_F-2} - \bar{Y}_{N_F-1})$$

$$0 = \bar{L}_{N_F+1} \bar{X}_{N_F+1} - \bar{L}_{N_F} \bar{X}_{N_F} + \bar{V} \bar{Y}_{N_F-1} - (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) \bar{Y}_{N_F} + \bar{z}_F \bar{F}$$

$$0 = \bar{L}_{N_F+2} \bar{X}_{N_F+2} - \bar{L}_{N_F+1} \bar{X}_{N_F+1} + (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F})(\bar{Y}_{N_F} - \bar{Y}_{N_F+1})$$

⋮

⋮

⋮

$$0 = \bar{L} \bar{X}_N - \bar{L}_{N-1} \bar{X}_{N-1} + (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F})(\bar{Y}_{N-2} - \bar{Y}_{N-1})$$

$$0 = -\bar{L} \bar{X}_N + (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) \bar{Y}_{N-1} - \bar{D} \bar{X}_N$$

Sapendo che

$$\bar{L}_2 = \bar{L}_3 = \dots = \bar{L}_{N_F} = \bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}$$

$$\bar{L}_{N_F+1} = \dots = \bar{L}_{N-1} = \bar{L}$$

$$\bar{F} = \bar{D} + \bar{B}$$

$$\bar{V} + \bar{B} = \bar{L} + \bar{q}_F \bar{F} \quad \Rightarrow \quad \bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F} = \bar{L} + \bar{D}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{D} \bar{X}_N &= -\bar{L} \bar{X}_N + \overbrace{(\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F})}^{\bar{L} + \bar{D}} \bar{Y}_{N-1} = -\bar{L} \bar{X}_{N+1} + (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) \bar{Y}_{N-2} = \\ &= \dots = -\bar{L} \bar{X}_{N_F+1} + (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) \bar{Y}_{N_F} \end{aligned}$$

e dall'altra parte

$$\begin{aligned} 2) \quad \bar{B} \bar{X}_1 &= (\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}) \bar{X}_2 - \bar{V} \bar{Y}_1 = (\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}) \bar{X}_3 - \bar{V} \bar{Y}_2 = (\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}) \bar{X}_4 - \bar{V} \bar{Y}_3 = \\ &= \dots = (\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}) \bar{X}_{N_F} - \bar{V} \bar{Y}_{N_F-1} \end{aligned}$$

e infine

$$3) \quad \underbrace{\bar{L} \bar{X}_{N_F+1} - (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) \bar{Y}_{N_F}}_{-\bar{D} \bar{X}_N} = \underbrace{(\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}) \bar{X}_{N_F} - \bar{V} \bar{Y}_{N_F-1}}_{\bar{B} \bar{X}_1} - \bar{Z}_P \bar{F}$$

Quindi per $\lambda =$

$$\bar{Y}_\lambda = \frac{\bar{L}}{\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}} \bar{X}_{\lambda+1} + \frac{\bar{D}}{\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}} \bar{X}_N \triangleq R_1(\bar{X}_{\lambda+1}) \quad \lambda = N_F, \dots, N-1$$

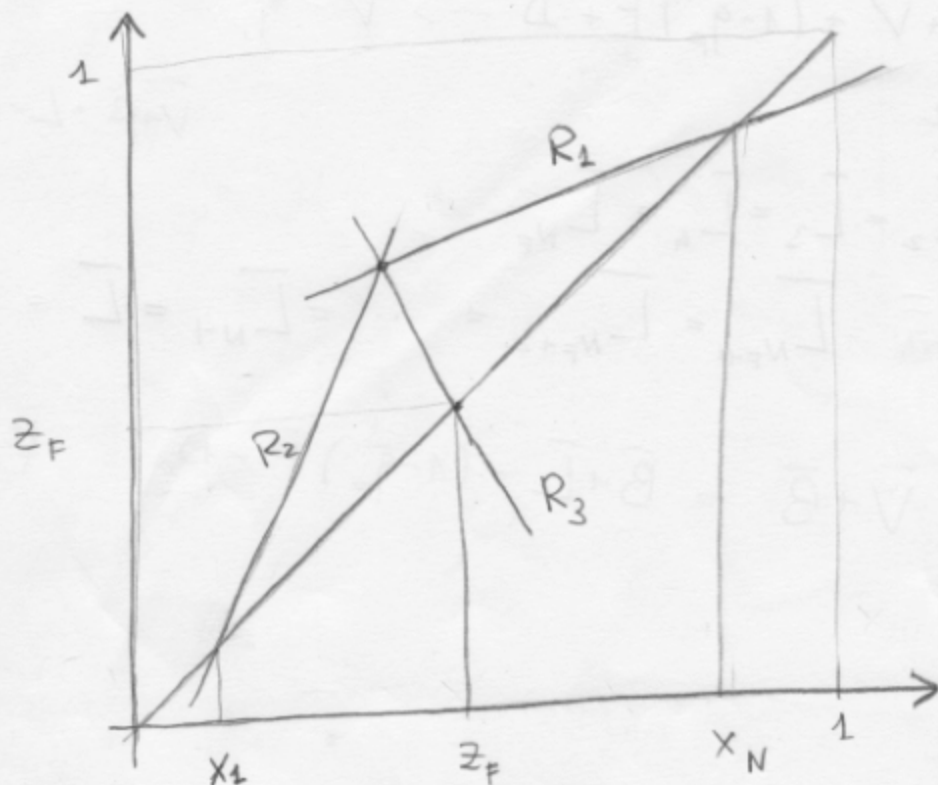
$$\bar{Y}_\lambda = \frac{\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}}{\bar{V}} \bar{X}_{\lambda+1} - \frac{\bar{B}}{\bar{V}} \bar{X}_1 \triangleq R_2(\bar{X}_{\lambda+1}) \quad \lambda = 1, \dots, N_F - 1$$

$$\bar{Y}_1 = F(\bar{X}_1)$$

Osservo che $R_1(x)$ e $R_2(x)$ sono delle rette nel piano x, y e che $R_1(\bar{X}_N) = \bar{X}_N$ e $R_2(\bar{X}_1) = \bar{X}_1$

Inoltre se riusciamo a determinare l'intersezione delle due rette si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} (\bar{V} + (1 - \bar{q}_F) \bar{F}) Y = \bar{L} X + \bar{D} \bar{X}_N \\ \bar{V} Y = (\bar{L} + \bar{q}_F \bar{F}) X - \bar{B} \bar{X}_1 \end{cases}$$



Sommando le due equazioni si ottiene

$$(1 - \bar{q}_F) Y = -\bar{q}_F X + \bar{Z}_F \quad \text{che coincide con la retta } R_3 \quad \text{A1}$$

Ricardomarsi ora che

$$\bar{y}_i = F(x_i)$$

olive

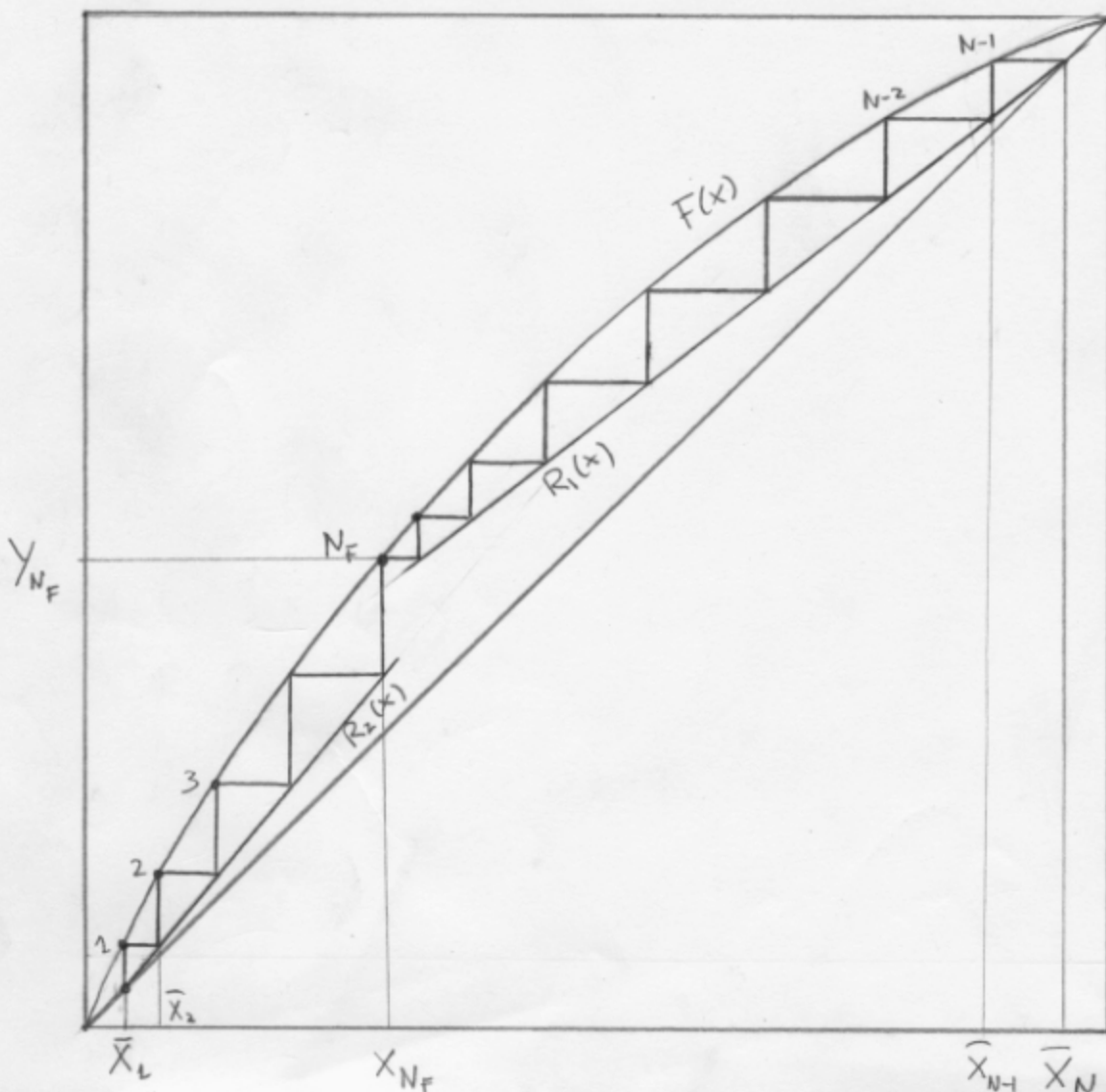
$$F(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

Alora, partiendo de $\bar{X}_1$

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{X}_1 & \rightarrow & \bar{Y}_1 & \rightarrow & \bar{X}_2 & \rightarrow & \bar{Y}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{Y}_{N_F-1} \rightarrow \bar{X}_{N_F} \rightarrow \bar{Y}_{N_F} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & F(\bar{X}_1) & & R_2^{-1}(\bar{Y}_1) & & F(\bar{X}_2) \\ & & \text{portendo de } \bar{X}_N & & & & \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & F(\bar{X}_{N_F-1}) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & R_2^{-1}(\bar{Y}_{N_F-1}) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & F(\bar{X}_{N_F}) \end{array}$$

portando de $\overline{X}_N$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \bar{X}_N & \longrightarrow & \bar{Y}_{N-1} & \longrightarrow & \bar{X}_{N-1} & \longrightarrow & \bar{Y}_{N-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bar{Y} & \longrightarrow & \bar{X} & \longrightarrow & \bar{Y}_{N_F} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel_{N_F+1} & & \parallel_{N_F+1} & & \parallel \\ & & R_1(\bar{X}_N) & & F^{-1}(\bar{Y}_{N-1}) & & R_1(\bar{X}_{N-1}) & & & & R_1(\bar{X}_{N_F+2}) & & F^{-1}(\bar{Y}_{N_F+1}) & & R_1(\bar{X}_{N_F+1}) \\ & & \bar{X}_N & & & & & & & & & & & & \end{array}$$



Le equazioni di stato che coinvolgono le derivate di $X_i M_i$ possono essere trasformate nel modo seguente usando le leggi che $\frac{d(X_i M_i)}{dt} = M_i \frac{dX_i}{dt} + X_i \frac{dM_i}{dt}$

$$M_1 \frac{dX_1}{dt} = L_2 X_2 - V Y_1 - B X_1 - X_1 [L_2 - V - B] = L_2 (X_2 - X_1) + V (X_1 - Y_2)$$

$$M_2 \frac{dX_2}{dt} = L_3 X_3 - L_2 X_2 + V (Y_1 - Y_2) - X_2 [L_3 - L_2] = L_3 (X_3 - X_2) + V (Y_1 - Y_2)$$

$$M_3 \frac{dX_3}{dt} = L_4 X_4 - L_3 X_3 + V (Y_2 - Y_3) - X_3 [L_4 - L_3] = L_4 (X_4 - X_3) + V (Y_2 - Y_3)$$

$$M_{N_F-1} \frac{dX_{N_F-1}}{dt} = L_{N_F} X_{N_F} - L_{N_F-1} X_{N_F-1} + V (Y_{N_F-2} - Y_{N_F-1}) - X_{N_F-1} [L_{N_F} - L_{N_F-1}] = L_{N_F} (X_{N_F} - X_{N_F-1}) + V (Y_{N_F-2} - Y_{N_F-1})$$

$$\begin{aligned} M_{N_F} \frac{dX_{N_F}}{dt} &= L_{N_F+1} X_{N_F+1} - L_{N_F} X_{N_F} + V Y_{N_F+1} + (V + (1-q_F)F) Y_{N_F} + Z_F F \\ &\quad - X_{N_F} [L_{N_F+1} - L_{N_F} + q_F F] \\ &= L_{N_F+1} (X_{N_F+1} - X_{N_F}) + V (Y_{N_F+1} - Y_{N_F}) + q_F F (Y_{N_F} - X_{N_F}) + F (Z_F - Y_{N_F}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{N_F+1} \frac{dX_{N_F+1}}{dt} &= L_{N_F+2} X_{N_F+2} - L_{N_F+1} X_{N_F+1} + \underbrace{(Y_{N_F} - Y_{N_F+1})}_{(V + (1-q_F)F)} - X_{N_F+1} [L_{N_F+2} - L_{N_F+1}] = L_{N_F+2} (X_{N_F+2} - X_{N_F+1}) + \underbrace{(Y_{N_F} - Y_{N_F+1})}_{(V + (1-q_F)F)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{N-1} \frac{dX_{N-1}}{dt} &= L X_N - L_{N-1} X_{N-1} + (V + (1-q_F)F) (Y_{N-2} - Y_{N-1}) - X_{N-1} [L - L_{N-1}] = \\ &= L (X_N - X_{N-1}) + (V + (1-q_F)F) (Y_{N-2} - Y_{N-1}) \end{aligned}$$

$$M_N \frac{dX_N}{dt} = -L X_N + (V + (1-q_F)F) Y_{N-1} - X_N [L + V + (1-q_F)F - B] = (V + (1-q_F)F) (Y_{N-1} - X_N)$$

Abbiamo quindi un sistema non lineare
 con stati $M_1, \dots, M_N, X_1, \dots, X_N$ $2N$ stati
 e 7 ingressi B, D, L, V, q_F, F, z_F

Di solito $q_F = 1$ e quindi si hanno 6 ingressi
 e le equazioni di stato si semplificano

$$\frac{dM_1}{dt} = f_2(M_2, V) - V - B$$

$$\frac{dM_2}{dt} = f_3(M_3, V) - f_2(M_2, V)$$

$$\frac{dM_{N_F-1}}{dt} = f_{N_F}(M_{N_F}, V) - f_{N_F-1}(M_{N_F-1}, V)$$

$$\frac{dM_{N_F}}{dt} = f_{N_F+1}(M_{N_F+1}, V) - f_{N_F}(M_{N_F}, V) + q_F F$$

$$\frac{dM_{N_F+1}}{dt} = f_{N_F+2}(M_{N_F+2}, V) - f_{N_F+1}(M_{N_F+1}, V)$$

$$\frac{dM_{N-1}}{dt} = L - f_{N-1}(M_{N-1}, V)$$

$$\frac{dM_N}{dt} = -L + V - D$$

$$M_1 \frac{dx_1}{dt} = f_2(M_2, V)(x_2 - x_1) + V(x_1 - F(x_1))$$

$$M_2 \frac{dx_2}{dt} = f_3(M_3, V)(x_3 - x_2) + V(F(x_1) - F(x_2))$$

$$M_3 \frac{dx_3}{dt} = f_4(M_4, V)(x_4 - x_3) + V(F(x_2) - F(x_3))$$

⋮

$$M_{N_F-1} \frac{dx_{N_F-1}}{dt} = f_{N_F}(M_{N_F}, V)(x_{N_F} - x_{N_F-1}) + V(F(x_{N_F-2}) - F(x_{N_F-1}))$$

$$M_{N_F} \frac{dx_{N_F}}{dt} = f_{N_F+1}(M_{N_F+1}, V)(x_{N_F+1} - x_{N_F}) + V(F(x_{N_F-1}) - F(x_{N_F})) \\ + F(z_F - x_{N_F})$$

$$M_{N_F+1} \frac{dx_{N_F+1}}{dt} = f_{N_F+2}(M_{N_F+2}, V)(x_{N_F+2} - x_{N_F+1}) + V(F(x_{N_F}) - F(x_{N_F+1}))$$

⋮

$$M_{N-1} \frac{dx_{N-1}}{dt} = L(x_{N-1} - x_N) + V(F(x_{N-2}) - F(x_{N-1}))$$

$$M_N \frac{dx_N}{dt} = V(F(x_{N-1}) - x_N)$$

Un'altra versione semplificata del modello che si trova è quella in cui si suppone che le masse siano costanti

$$\frac{dM_i}{dt} = 0 \quad i = 2, \dots, N-1$$

In questo caso si ha che

$$L_2 = L_3 = \dots = L_{N_F} = L_{N_F+1} + q_F F = L + q_F F$$

$$L_{N_F+1} = L_{N_F+2} = \dots = L_{N-1} = L_N = L$$

Che risulta essere una condizione simile a quanto imposto su $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$.

La condizione su L_i vale se

$$f_i(M_i, V) \text{ e } g_i(M_i, V) \text{ uguali e indipendenti da } M_i, V \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$f_i(M_i, V) = g_i(M_i, V) \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$L_i = f_i(M_i, V) =$$

Se effettuiamo le linearizzazioni dello secondo serie di equazioni di stato otteniamo

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{x}_N}{dt} \end{bmatrix} = A_{11} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix} + A_{12} \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \vdots \\ \tilde{M}_N \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \vdots \\ \tilde{V}_N \\ \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_F \end{bmatrix}$$

Quindi il sistema linearizzato globale sarà

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{x}_N}{dt} \\ \frac{d\tilde{M}_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{M}_N}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{M}_1 \\ \vdots \\ \tilde{M}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \vdots \\ \tilde{V}_N \\ \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_F \end{bmatrix}$$

↑ ingresso

usate potremmo essere

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_D \\ \tilde{x}_B \\ \tilde{M}_D \\ \tilde{M}_B \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{M}_1 \\ \vdots \\ \tilde{M}_N \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} M_B &= M_1 \\ M_D &= M_N \\ \tilde{Y}_D &= \tilde{Y}_N = \frac{\partial F}{\partial x} \tilde{x}_N \\ \tilde{x}_B &= \tilde{x}_N \end{aligned}$$

Osservo che A ha due autovalori in zero (doppio interpretare) Si può dimostrare che gli altri autovalori sono stabili.

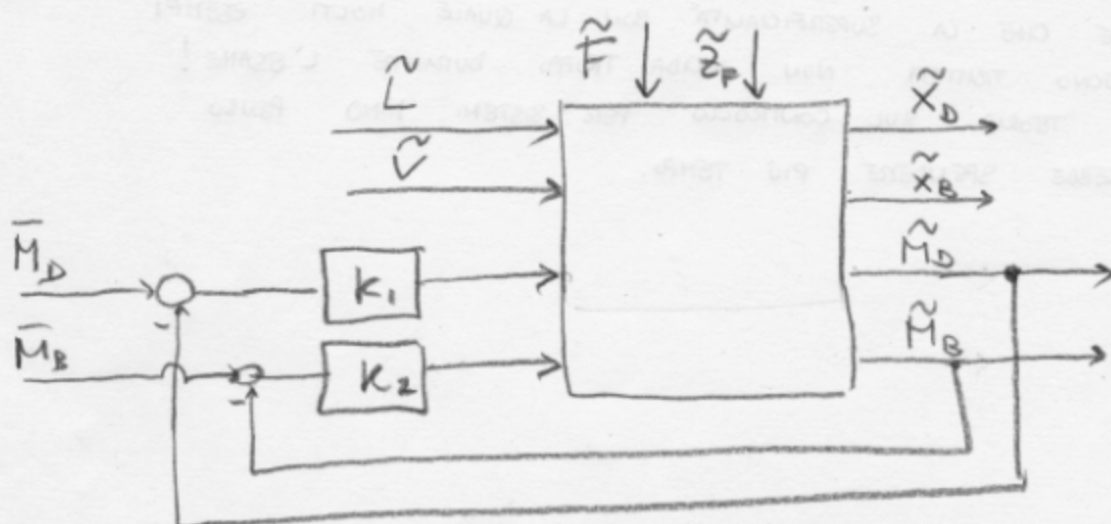
Tipicamente $q_F = 1$ e $\tilde{q}_F = 0$

$\tilde{F}, \tilde{z}_F$ sono disturbi

$\tilde{L}, \tilde{V}, \tilde{B}, \tilde{D}$ sono ingressi di controllo

$$d = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{z}_F \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{V} \\ \tilde{B} \\ \tilde{D} \end{bmatrix}$$

Per stabilizzare il sistema (2 poli origine) si possono usare $\tilde{B}$ e $\tilde{D}$ per controllare il livello nel bollitore (M_B) e nel condensatore (M_D)



Questo è detto configurazione LV

Con questo controllo otteniamo un sistema stabile. Se linearizziamo questo sistema, otteniamo un sistema lineare stabile con 2 stati. Attraverso tecniche di riduzione d'ordine del modello otteniamo sistemi con un numero minore di stati.

Il modello più semplice che si può ottenere

$$Y(s) = \frac{1}{1+75s} \begin{bmatrix} 87,8 & -86,4 \\ 108,2 & -109,6 \end{bmatrix} U(s) + \frac{1}{1+75s} \begin{bmatrix} 7,88 & 8,81 \\ 11,72 & 11,19 \end{bmatrix} d(s)$$

dove $y = \begin{bmatrix} Y_D \\ x_B \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} L \\ V \end{bmatrix}$ $d = \begin{bmatrix} F \\ z_p \end{bmatrix}$

Si ha $G(s) = \frac{1}{1+75s} \begin{bmatrix} 87,8 & -86,4 \\ 108,2 & -109,6 \end{bmatrix}$

Questa matrice di trasferimento si ottiene
da una colonna con 44 punti e dopo
aver effettuato una opportuna scalatura

Un esempio semplificato

Consideriamo una colonna con 3 piatti

$$N=3 \quad N_F=2$$

Supponiamo che le nostre tre piatte siano collegate

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM_2}{dt} = \frac{dM_3}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} M_1 = L_2 - V_1 - B$$

$$\frac{d}{dt} M_2 = L_3 - L_2 + V_1 - V_2 + F$$

$$\frac{dM_3}{dt} = V_2 - L_3 - D$$

Sia $L_3 = L$ e $V_1 = V$, $V_2 = V + (1 - q_F)F = V$ (perché $q_F = 1$)

dal fatto che $\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM_2}{dt} = \frac{dM_3}{dt} = 0$ possiamo dedurre

$$L_2 = L + F, \quad D = V - L, \quad B = L + F - V$$

Abbiamo inoltre

$$M_1 \frac{dx_1}{dt} = L_2 x_2 - V y_1 - B x_1 = (L + F)(x_2 - x_1) + V(x_1 - y_1)$$

$$M_2 \frac{dx_2}{dt} = L_3 x_3 - L_2 x_2 + V_1 y_1 - V_2 y_2 + 2F F = L(x_3 - x_2) + V(y_1 - y_2) + F(z_F - x_2)$$

$$M_3 \frac{dx_3}{dt} = -L_3 x_3 + V_2 y_2 - D x_3 = V(y_2 - x_3)$$

Sistema a 3 stati e 4 inputi L, V, F, Z_F

Equilibrio

$$\begin{cases} (\bar{L} + \bar{F})(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \bar{V}(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) = 0 \\ \bar{L}(\bar{x}_3 - \bar{x}_2) + \bar{V}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{F}(\bar{z}_F - \bar{x}_2) = 0 \\ \bar{V}(\bar{y}_2 - \bar{x}_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{y}_2 = \bar{x}_3$$

Linearizzazione

$$M_1 \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = (\bar{L} + \bar{F})(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + (\tilde{L} + \tilde{F})(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \bar{V}(\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1) + \tilde{V}(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)$$

$$M_2 \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \bar{L}(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2) + \tilde{L}(\bar{x}_3 - \bar{x}_2) + \bar{V}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + \tilde{V}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{F}(\tilde{z}_F - \tilde{x}_2) + \tilde{F}(\bar{z}_F - \bar{x}_2)$$

$$M_3 \frac{d\tilde{x}_3}{dt} = \bar{V}(\tilde{y}_2 - \tilde{x}_3) + \tilde{V}(\bar{y}_2 - \bar{x}_3)$$

poiché $y = F(x)$ allora

$$\tilde{y}_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_1} \tilde{x}_1 = h_1 \tilde{x}_1$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_2} \tilde{x}_2 = h_2 \tilde{x}_2$$

$$\tilde{y}_3 = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_3} \tilde{x}_3 = h_3 \tilde{x}_3$$

$$A = \begin{bmatrix} \bar{V} - \bar{L} - \bar{F} - \bar{V}h_1 & \bar{L} + \bar{F} & 0 \\ \bar{V}h_1 & -\bar{L} - \bar{V}h_2 - \bar{F} & \bar{L} \\ 0 & \bar{V}h_2 & -\bar{V} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \bar{X}_2 - \bar{X}_1 & \bar{X}_1 - \bar{Y}_1 & \bar{X}_2 - \bar{X}_1 & 0 \\ \bar{X}_3 - \bar{X}_2 & \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 & \bar{Z}_p - \bar{X}_2 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prevalence $\bar{F} = 1, \bar{Z}_F = 0,5, q_F = 1, \alpha = 10, \bar{D} = 0,5$

$\bar{L} = 3,05, \bar{V} = 3,55, M_1 = M_2 = M_3 = 1$

Si ottiene

$\bar{X}_1 = 0,9 \quad \bar{X}_3 = 0,4$

e

$$A = \begin{bmatrix} -10,334 & 4,050 & 0 \\ 9,834 & -5,332 & 3,050 \\ 0 & 1,282 & -3,050 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,3737 & -0,4263 & 0,3737 & 0 \\ 0,4263 & -0,3737 & 0,0263 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

autovalori di $A = -0,22, -4,26, -14,7$

costante di tempo dominante $= \frac{1}{0,22} = 4,5 \text{ min}$

$$G(s) = (sI - A)^{-1} B$$

$$G(s) = -A^{-1} B = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,748 & 0,366 & 0,959 \\ 2,08 & -2,07 & 1,01 & 2,65 \\ 0,85 & -0,853 & 0,433 & 1,04 \end{bmatrix}$$

Colonna di Distillazione: Modello Rigoroso

Diamo di seguito una descrizione delle condizioni 3)
Si assumono 2 componenti

Condensano in un piatto ^(a) surriscaldato

$$1) \frac{dM_i}{dt} = \frac{d}{dt} (M_{iL} + M_{iV}) = L_{i+1} + V_{i-1} - L_i - V_i$$

M_{iL} molo liquido

M_{iV} molo vapore

$$2) \frac{d}{dt} (x_i M_i) = \frac{d}{dt} (x_i M_{iL} + y_i M_{iV})$$

$$= L_{i+1} x_{i+1} + V_{i-1} y_{i-1} - L_i x_i - V_i y_i$$

$$3) \frac{d}{dt} U_i = \frac{d}{dt} (M_{Li} u_{Li} + M_{Vi} u_{Vi})$$
$$= L_{i+1} h_{L,i+1} + V_{i-1} h_{V,i-1} - L_i h_{Li} - V_i h_{Vi}$$

Simplification

$$A) M_{v,i} \approx 0 \Rightarrow M_i \approx M_{L,i}$$

$$(1) \frac{dM_i}{dt} = L_{i+1} + V_{i-1} - L_i - V_i$$

$$(2) \frac{d}{dt}(x_i M_i) = L_{i+1} x_{i+1} + V_{i-1} y_{i-1} - L_i x_i - V_i y_i$$

$$(3) \frac{d}{dt}(M_i u_{L,i}) = L_{i+1} h_{L,i+1} + V_{i-1} h_{V,i-1} - L_i h_{L,i} - V_i h_{V,i} \quad (*)$$

Sull' ultima equazione (3) si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M_i u_{L,i}) &= M_i \frac{du_{L,i}}{dt} + u_{L,i} \frac{dM_i}{dt} = \\ &= M_i \frac{du_{L,i}}{dt} + u_{L,i} [L_{i+1} + V_{i-1} - L_i - V_i] \end{aligned}$$

Combinando con (3) si ottiene

$$\begin{aligned} (3') M_i \frac{du_{L,i}}{dt} &= L_{i+1} (h_{L,i+1} - u_{L,i}) + V_{i-1} (h_{V,i-1} - u_{L,i}) \\ &\quad - L_i (h_{L,i} - u_{L,i}) - V_i (h_{V,i} - u_{L,i}) \end{aligned}$$

$$B) h_{L,i} \approx u_{L,i}$$

$$\begin{aligned} (3'') M_i \frac{dh_{L,i}}{dt} &= L_{i+1} (h_{L,i+1} - h_{L,i}) + V_{i-1} (h_{V,i-1} - h_{L,i}) \\ &\quad - V_i (h_{V,i} - h_{L,i}) \end{aligned}$$

$$C) \frac{d h_{L,i}}{dt} \approx 0$$

$$h_{L,i}(t) = \bar{h}_{L,i} \quad \text{costanti}$$

$$0 = L_{i+1}(\bar{h}_{L,i+1} - \bar{h}_{L,i}) + V_{i-1}(h_{V,i-1} - \bar{h}_{L,i}) - V_i(h_{V,i} - \bar{h}_{L,i})$$

$$D) \bar{h}_{L,i} = \bar{h}_L \quad \text{tutte uguali}$$

$$0 = V_{i-1}(h_{V,i-1} - \bar{h}_L) - V_i(h_{V,i} - \bar{h}_L)$$

$$E) h_{V,i}(t) = h_V(t) \quad \text{tutte uguali}$$

Cio. implica

$$V_{i-1}(t) = V_i(t)$$

Possiamo concludere che per tutti gli studi i per i quali non si ha melioro e appunto di materiale si ha che $V_{i-1} = V_i$.

Quindi si ottiene

$$V_1 = V_2 = \dots = V_{N_F-1} \triangleq V$$

$$V_{N_F-1} + (1 - q_F)F = V_{N_F} = \dots = V_{N-1} = V + (1 - q_F)F$$

V è da considerarsi un'impresa

Comments su ipotesi semplificative

A) E' ragionevole assumere che la massa del vapore sia trascurabile rispetto alla massa del liquido

B) Per i liquidi l'entalpia e l'energia interna sono vicine

T (K)	h _{liq} (kJ/kg)	u _{liq} (kJ/kg)
300	1.6309	1.6309
350	0.9904	0.9904
400	0.5016	0.5016
450	0.1326	0.1326
500	0.0132	0.0132

C), D), E) Si assume che

$$h_{Li} \approx X [C_{PL} (T_i - T_b) + h_{PV}] + (1-X) [\bar{C}_{PL} (T_i - \bar{T}_b) + \bar{h}_{PV}]$$

$h_{PV}, \bar{h}_{PV}$ entalpie dei due componenti alla temperatura di ebollizione
 $C_{PL}, \bar{C}_{PL}$ calore specifici dei due componenti liquidi
 $T_b, \bar{T}_b$ temperature di ebollizione dei due componenti.

(i) Si suppone che la pressione sia costante lungo tutta la colonna quindi T_b e $\bar{T}_b$ ^{che dipendono} ^{o dalla pressione} non dipendono da i.

(ii) Si assume che i due componenti abbiano cioè lo stesso calore specifico $C_{PL} \approx \bar{C}_{PL}$

$$h_{Li} \approx C_{PL} [T_i - (X T_b + (1-X) \bar{T}_b)]$$

(iii) $h_{PV} \approx \bar{h}_{PV}$ entalpie di vapore costanti

(iv) Si suppone che la temperature T_i non costanti e che valga

$$T_i \approx X T_b + (1-X) \bar{T}_b \quad \text{così che}$$

$$h_{Li} \approx h_{PV}$$

E)

$$h_{v,i} \cong x [C_{pv} (T_1 - T_b) + h_{pv}] + (1-x) [\bar{C}_{pv} (T_1 - \bar{T}_b) + \bar{h}_{pv}]$$

$h_{pv}, \bar{h}_{pv}$ entalpie specifiche al punto di ebollizione ad una certa pressione

(i) $h_{pv} \approx \bar{h}_{pv}$

$$h_{v,i} \cong x C_{pv} (T_1 - T_b) + (1-x) \bar{C}_{pv} (T_1 - \bar{T}_b) + h_{pv}$$

(ii) $C_{pv} \approx \bar{C}_{pv}$

$$h_{v,i} \cong C_{pv} [T_1 - (x T_b + (1-x) \bar{T}_b)] + h_{pv}$$

(iii) Stesso ipotesi su T_i verso primo

Si ottiene

$$h_{v,i} \approx h_{pv}$$