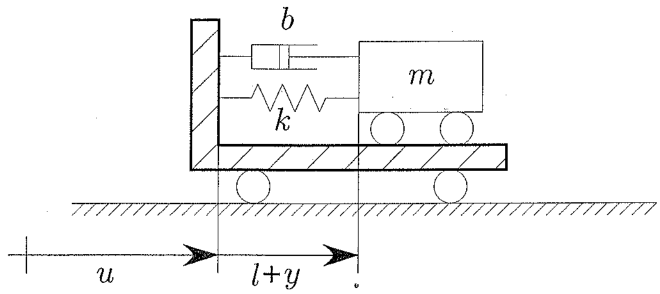
Esercizio 1A. Si consideri il seguente sistema meccanico.

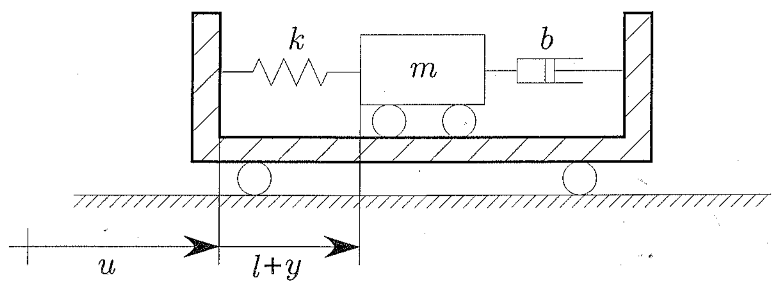


Siano y lo spostamento della massa m rispetto alla posizione di equilibrio l (molla a riposo), u lo spostamento del carrello, $b = 2$ la costante di attrito viscoso, $k = 5$ la costante elastica della molla, $m = 1$ la massa del carrello interno.

1. calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$;

2. determinare un modello di stato del sistema;

Esercizio 1B. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Siano y lo spostamento della massa m rispetto alla posizione di equilibrio l (molla a riposo), u lo spostamento del carrello, $b = 2$ la costante di attrito viscoso, $k = 5$ la costante elastica della molla, $m = 1$ la massa del carrello interno.

1. calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$;

2. determinare un modello di stato del sistema;

$\boxed{\text{ES 1A}}$

$F = ma \Rightarrow m(\ddot{u} + \ddot{y}) = -b\dot{y} - ky$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = -\ddot{u}$$

$$G(s) = \frac{-s^2}{s^2+2s+5} = -1 + \frac{2s+5}{s^2+2s+5}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} x + [-1] u$$

Se l'ingresso era $\bar{u} = \ddot{u}$

$$G(s) = -\frac{1}{s^2+2s+5}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$\boxed{\text{ES 2A}}$

Stessa soluzione

Esercizio 2A. Dato il modello differenziale

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1+a)\frac{dy}{dt} + ay = \frac{du}{dt} - u$$

dove a é un parametro reale, é richiesto di:

1. nel caso $a = 1$, calcolare la risposta a regime al segnale di ingresso $u(t) = [1 + sin(t)]1(t)$;
2. calcolare la risposta impulsiva per $a \neq 1$;
3. studiare, al variare di a, la stabilitá interna (rispetto alle condizioni iniziali);
4. in corrispondenza al valore $a = -1$, calcolare l'evoluzione libera d'uscita corrispondente alle condizioni iniziali $y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 1$.

$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+a)}$$

1) per $a = 1 \Rightarrow W(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} \Rightarrow W(0) = -1$ e $W(j) = \frac{1+j}{2} \Rightarrow |W(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e $\arg W(j) = 45° \Rightarrow \boxed{y(t) = \left[-1 + \frac{\sin(t+45°)}{\sqrt{2}}\right]1(t) = \frac{[\sin t + \cos t - 2]}{2}\,1(t)}$

2) per $a \neq 1 \Rightarrow W(s) = \frac{a+1}{a-1}\,\frac{1}{s+a} + \frac{2}{1-a}\,\frac{1}{s+1} \Rightarrow \boxed{w(t) = \frac{1}{1-a}\left[2e^{-t} - (a+1)e^{-at}\right]1(t)}$

3) EQ. CARATTERISTICA $\Rightarrow (s+1)(s+a) = 0 \Rightarrow s = -1, -a \Rightarrow$ $\boxed{\text{INT. STAB. per } a > 0}$

4) $a = -1 \Rightarrow \ddot{y} - y = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{s\,y(0) + \dot{y}(0)}{s^2 - 1} = \frac{s+1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \boxed{y(t) = e^{t}}$

Esercizio 2B. Dato il modello differenziale

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2+a)\frac{dy}{dt} + 2ay = \frac{du}{dt} - 2u$$

dove a é un parametro reale, é richiesto di:

1. nel caso $a = 2$, calcolare la risposta a regime al segnale di ingresso $u(t) = [1 + cos(2t)]1(t)$;
2. calcolare la risposta impulsiva per $a \neq 2$;
3. studiare, al variare di a, la stabilitá interna (rispetto alle condizioni iniziali);
4. in corrispondenza al valore $a = -2$, calcolare l'evoluzione libera d'uscita corrispondente alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\frac{dy}{dt}(0) = 2$.

$$W(s) = \frac{s-2}{(s+a)(s+2)}$$

1) Per $a=2 \Rightarrow W(s) = \frac{s-2}{(s+2)^2} \Rightarrow W(0) = -\frac{1}{2}$ e $W(2j) = \frac{1+j}{4} \Rightarrow |W(2j)| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

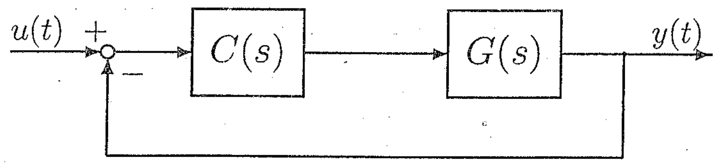
e $\arg W(2j) = 45° \Rightarrow \boxed{y(t) = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t+45°)}{2\sqrt{2}}\right]1(t) = \frac{[\cos 2t - \sin 2t - 2]}{4}1(t)}$

2) Per $a \neq 2 \Rightarrow W(s) = \frac{a+2}{a-2}\frac{1}{s+a} + \frac{4}{2-a}\frac{1}{s+2} \Rightarrow \boxed{w(t) = \frac{1}{2-a}\left[4e^{-2t} - (a+2)e^{-at}\right]1(t)}$

3) EQ. CARATT. $\Rightarrow (s+2)(s+a)=0 \Rightarrow s=-2,-a \Rightarrow$ $\boxed{\text{INT. STAB. per } a>0}$

4) $a=-2 \Rightarrow \ddot{y} - 4y = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{s y(0) + \dot{y}(0)}{s^2-4} = \frac{s+2}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{s-2} \Rightarrow \boxed{y(t) = e^{2t}}$

Esercizio 3A. Dato lo schema seguente:



dove $C(s) = k\frac{s+1}{(s-1)}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+a}$, con a e k parametri reali, é richiesto di:

1. calcolare la funzione di trasferimento, sia $W(s)$, tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$;
2. studiare la stabilitá di $W(s)$ al variare di a e k;
3. determinare il valore di a sapendo che la risposta impulsiva del blocco $G(s)$ contiene il modo e^{-t}. Calcolare anche il secondo modo.

1) $W(s) = \dfrac{K(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+a)+K(s+1)} = \dfrac{n(s)}{d(s)}$

2) La stabilità equivale all'avere $d(s)$ solo radici a parte reale negativa (anche se ci fosse cancellazione zero-polo, sarebbe di un polo stabile $s=-1$).

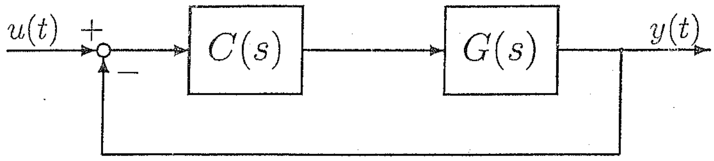
$d(s) = s^3 + s^2 + s(a+K-2) + (K-a)$

ROUTH $\Rightarrow$ $\begin{array}{|ll} 1 & a+K-2 \\ 1 & K-a \\ 2(a-1) & \\ K-a & \end{array}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2(a-1) > 0 \\ K-a > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K > a > 1}$

3) $G(s)$ contiene il modo e^{-t} $\Leftrightarrow$ $(s+1)$ è fattore di s^2+2s+a $\Leftrightarrow$ $\boxed{a=1}$

$a = 1 \Rightarrow G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow$ $\boxed{\text{modi } e^{-t},\ t e^{-t}}$

Esercizio 3B. Dato lo schema seguente:



dove $C(s) = k\frac{s+1}{(s-1)}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+2a}$, con a e k parametri reali, é richiesto di:

1. calcolare la funzione di trasferimento, sia $W(s)$, tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$;
2. studiare la stabilitá di $W(s)$ al variare di a e k; .
3. determinare il valore di a sapendo che la risposta impulsiva del blocco $G(s)$ contiene il modo e^{-t}. Calcolare anche il secondo modo.

1) $$W(s) = \frac{k(s+1)}{s^3+s^2+s(2a+k-2)+(k-2a)}$$

2) ROUTH ⇨

1	$2a+k-2$
1	$k-2a$
$2(2a-1)$	
$k-2a$	

⇨ $\boxed{k>2a \text{ e } a>\frac{1}{2}}$

3) $(s+1)$ fattore di $(s^2+2s+2a)$ ⇔ $\boxed{a=\frac{1}{2}}$

$a=\frac{1}{2}$ ⇨ $G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$ ⇨ $\boxed{\text{modi } e^{-t}, te^{-t}}$

FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2002-2003)

2° compitino e primo appello sessione estiva - 26 giugno 2003

Cognome e nome: ______________________ Matr.: ____________

Corso di laurea: ______________________ Docente: ____________

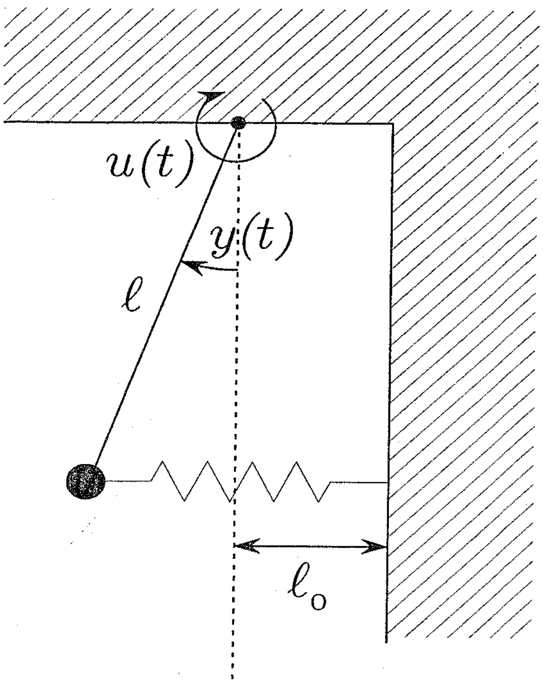
Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

Secondo compitino (Esercizi 2,3,4) tempo: 2 e 1/4 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4) tempo: 3 ore

Tema A

Esercizio 1. Sia dato lo schema di figura

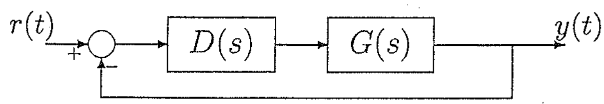


dove si assume la lunghezza a riposo l_0 della molla corrispondente esattamente alla posizione verticale del pendolo, la costante elastica della molla pari a $k = 5$, la massa della pallina pari a $m = 1$, la lunghezza del pendolo pari a $l = 2$, l'accelerazione di gravità $g = 10$. L'ingresso $u(t)$ sia la coppia applicata da un motore sul punto di appoggio del pendolo; il motore è soggetto ad attrito viscoso (che genera una coppia proporzionale alla velocità angolare) con coefficiente di attrito pari a $\gamma = 0.2$. Si assuma infine come uscita $y(t)$ la posizione angolare del pendolo rispetto alla verticale.
È richiesto di:

1. scrivere un modello differenziale, linearizzato attorno a $y = 0$, che descriva la dinamica del sistema;
2. calcolare la corrispondente funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y;

3. valutare la risposta a regime corrispondente all'ingresso sinusoidale $u(t) = 5\sin(\omega_n t)$, dove ω_n é la pulsazione naturale (non smorzata) del sistema.

Esercizio 2. Si consideri lo schema in figura



e si supponga che $D(s) = K$ e sia

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+3)}\,.$$

1. Si tracci il luogo delle radici per $K > 0$ (si determinino in particolare gli eventuali asintoti e punti doppi)
2. si determinino i valori di K per cui il sistema ad anello chiuso è stabile e quelli per cui esso presenta modi oscillatori smorzati.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove $D(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)}\,.$$

Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$. Ricorrendo al criterio di Nyquist, si studi quindi la stabilità del sistema a catena chiusa, al variare di $K > 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}\,.$$

1. Utilizzando il metodo della sintesi in frequenza (di Bode), si determini la struttura di un controllore $D(s)$ che garantisca che le seguenti specifiche siano soddisfatte:
   a. il sistema controllato sia di tipo 0 ed abbia errore a regime in risposta ad un gradino unitario $|e_{r,0}| \leq \frac{1}{11}$;
   b. la pulsazione di attraversamento sia $\omega_c = 1$ rad/s;
   c. il margine di fase risultante sia $PM \geq 40°$.
2. Come si dovrebbero modificare le specifiche (a)-(c) per diminuire contemporaneamente il tempo di salita t_r e la sovraelongazione M_p del sistema in catena chiusa?

FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2002-2003)

2° compitino e primo appello sessione estiva - 26 giugno 2003

Cognome e nome: ______________________ Matr.: __________

Corso di laurea: ______________________ Docente: __________

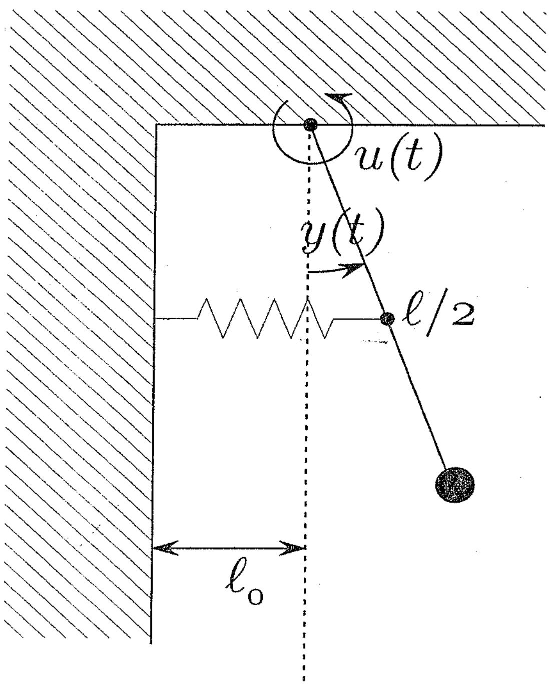
Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

Secondo compitino (Esercizi 2,3,4) tempo: 2 e 1/4 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4) tempo: 3 ore

$\boxed{\text{Tema B}}$

Esercizio 1. Sia dato lo schema di figura

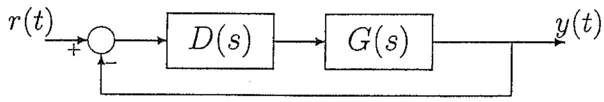


dove si assume la lunghezza a riposo l_0 della molla corrispondente esattamente alla posizione verticale del pendolo, la costante elastica della molla pari a $k = 10$, la massa della pallina pari a $m = 1$, la lunghezza del pendolo pari a $l = 2$, l'accelerazione di gravità $g = 10$. L'ingresso $u(t)$ sia la coppia applicata da un motore sul punto di appoggio del pendolo; il motore è soggetto ad attrito viscoso (che genera una coppia proporzionale alla velocità angolare) con coefficiente di attrito pari a $\gamma = 0.2$. Si assuma infine come uscita $y(t)$ la posizione angolare del pendolo rispetto alla verticale.
È richiesto di:

1. scrivere un modello differenziale, linearizzato attorno a $y = 0$, che descriva la dinamica del sistema;
2. calcolare la corrispondente funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y;

3. valutare la risposta a regime corrispondente all'ingresso sinusoidale $u(t) = 5\sin(\omega_n t)$, dove ω_n é la pulsazione naturale (non smorzata) del sistema.

Esercizio 2. Si consideri lo schema in figura



e si supponga che $D(s) = K$ e sia

$$G(s) = \frac{s-2}{(s+2)^2(s+6)}.$$

1. Si tracci il luogo delle radici per $K > 0$ (si determinino in particolare gli eventuali asintoti e punti doppi)
2. si determinino i valori di K per cui il sistema ad anello chiuso è stabile e quelli per cui esso presenta modi oscillatori smorzati.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove $D(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{8}{s(s^2+2s+4)}.$$

Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$. Ricorrendo al criterio di Nyquist, si studi quindi la stabilità del sistema a catena chiusa, al variare di $K > 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)^3}.$$

1. Utilizzando il metodo della sintesi in frequenza (di Bode), si determini la struttura di un controllore $D(s)$ che garantisca che le seguenti specifiche siano soddisfatte:
   a. il sistema controllato sia di tipo 0 ed abbia errore a regime in risposta ad un gradino unitario $|e_{r,0}| \leq \frac{1}{11}$;
   b. la pulsazione di attraversamento sia $\omega_c = 10$ rad/s;
   c. il margine di fase risultante sia $PM \geq 40°$.
2. Come si dovrebbero modificare le specifiche (a)-(c) per diminuire contemporaneamente il tempo di salita t_r e la sovraelongazione M_p del sistema in catena chiusa?

VERSIONE A: 1) $l \operatorname{sen}\theta$ rappresenta lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio della molla, e $-K\, l \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ la componente tangenziale della forza esercitata dalla molla.

2) la ~~forza~~ coppia d'attrito ha la forma $-\gamma \dot{\theta}$

3) applicando le equazioni dei momenti si ha:

$$-\gamma \dot{\theta} - l m g \operatorname{sen}\theta - l^2 K \operatorname{sen}\theta \cos\theta + u = m l^2 \ddot{\theta}$$

da cui

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{m l^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta + \frac{K}{m}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{m l^2} u$$

che linearizzata ($\operatorname{sen}\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1$) fornisce:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{m l^2}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m}\right)\theta = \frac{1}{m l^2} u \iff \ddot{\theta} + \frac{1}{20}\dot{\theta} + 10\,\theta = \frac{1}{4} u}$$

La FDT vale allora

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{m l^2}\,\frac{1}{s^2 + \frac{\gamma}{m l^2}s + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m}\right)} \iff G(s) = \frac{1}{4\left[s^2 + 0.05 s + 10\right]}}$$

che è un sistema del secondo ordine con $\omega_n = \sqrt{10} \cong 3.150$ e $\zeta \cong 0.0080$.

La risposta in frequenza per $\omega = \omega_n$ vale

$G(j\omega_n) \cong -1.59 j \Rightarrow$ MODULO $\cong 1.59$, FASE $= -90^\circ \Rightarrow$

$$\boxed{y(t) \cong 7.95 \operatorname{sen}\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) = -7.95 \cos(\omega_n t)}$$

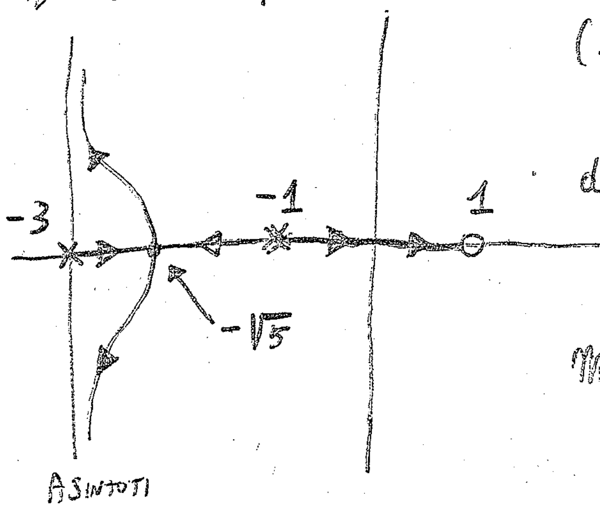
VERSIONE B: l'unica cosa che cambia è il momento della molla:

$$-\frac{l^2 K}{2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

ma noti i valori numerici tutto è uguale come nella VERSIONE A.

ESERCIZIO 2

VERSIONE A: La ricerca dei punti doppi porge $(s+1)(s^2-5)=0 \Rightarrow s=-1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$.
La formula per gli asintoti fornisce ($n-m=2$, $G(s)=\dfrac{s-1}{s^3+5s^2+\dots}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow -3$ come punto d'incrocio per due asintoti verticali.



(gli unici punti doppi "accettabili" per $K=0$ sono -1 e $-\sqrt{5}$).

$d(-\sqrt{5})+K\,n(-\sqrt{5})=0$ porge

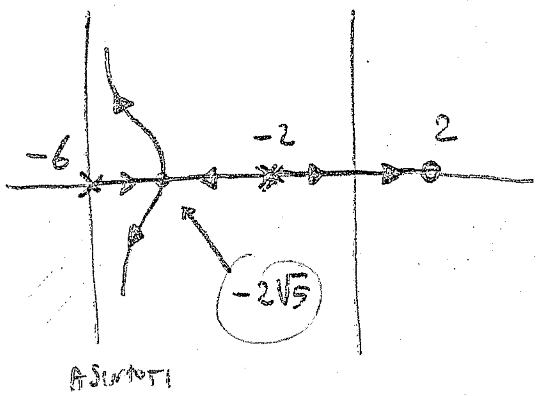
$$\boxed{K = 10\sqrt{5}-22 \cong 0.4}$$

Mentre $d(0)+K\,n(0)=0$ porge

$$\boxed{K=3}$$

Quindi per $0<K<3$ il sistema è stabile, mentre per $0<K<0.4$ presenta solo poli reali e quindi modi NON OSCILLATORI.

VERSIONE B: analogo: $(s+2)(s^2-20)=0 \Rightarrow s=-2, -2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ per i punti doppi, -6 per gli asintoti verticali, $\boxed{K = 40\sqrt{5}-88 \cong 1.6}$ per il punto doppio e $\boxed{K=12}$ per il passaggio per $s=0$.



Quindi per $0<K<12$ è stabile, e per $0<K<1.6$ non ha modi oscillatori.

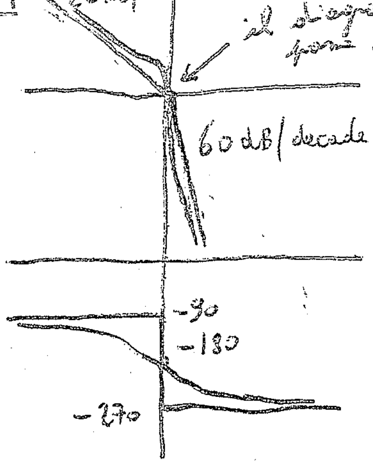
VERSIONE A:

$\omega_n = 1$

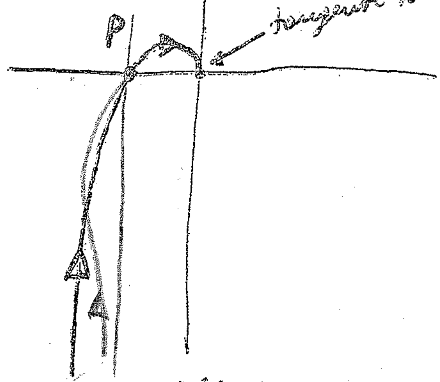
$\zeta = 0.5 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

⇩

PICCO RISONANZA



⇨

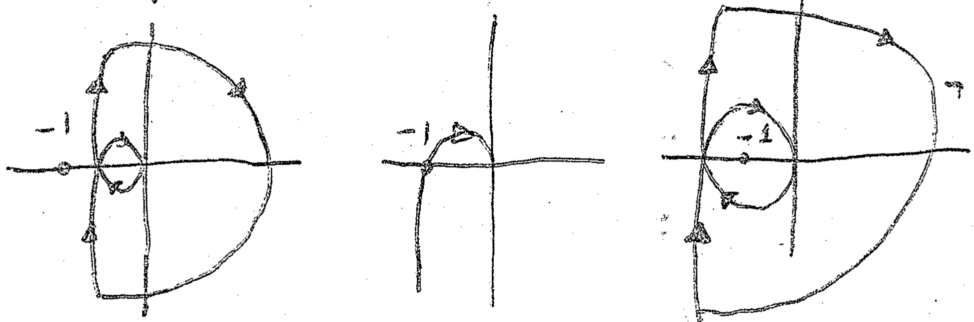


Per trovare il punto P, poniamo $\mathrm{Im}\, G(j\omega) = 0$.

$$G(j\omega) = \frac{-\omega + j(\omega^2 - 1)}{\omega(\omega^4 - \omega^2 + 1)} \Rightarrow \mathrm{Im}\, G(j\omega) = 0 \text{ se e solo se } \omega = 1.$$

Per $\omega = 1$ si ha $G(j1) = -1$

Quindi: $0 < K < 1$ $\qquad K = 1 \qquad K > 1$



NGIRI = 0, $G_+ = 0$ ⇨ $W_+ = 0$ ⇨ STABILE.

DUE RADICI IMM. ($\pm j1$) ⇨ INSTABILE.

NGIRI = −2, $G_+ = 0$ ⇨ $W_+ = 2$ ⇨ INSTABILE.

E quindi per continuità, per $K = 1$ abbiamo 2 radici IMM. e una stabile.

Conclusioni: $\boxed{\text{STABILE per } 0 < K < 1}$

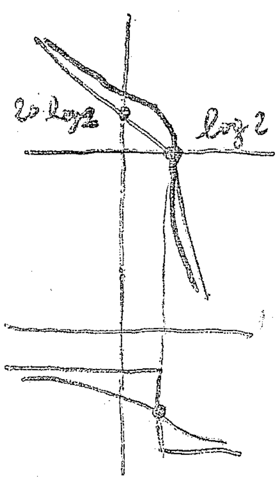
VERSIONE B:

$\omega_n = 2$

$\zeta = 0.5 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

⇩

PICCO RISONANZA



TUTTO IDENTICO il resto. P = −1, ma per $\omega = 2$.

$\boxed{\text{STABILE per } 0 < K < 1}$

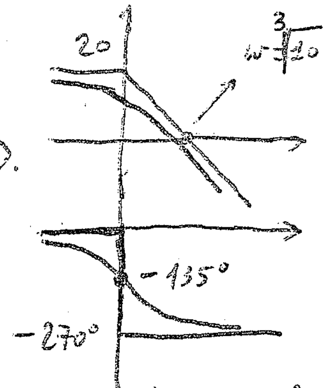
ESERCIZIO 4

VERSIONE A: tipo 0 ⇒ no INTEGRATORI

$$|errore| \leq \frac{1}{11} \Rightarrow \left| \frac{1}{1+G(0)D(0)} \right| \leq \frac{1}{11} \Rightarrow G(0)D(0) \geq 10 \Rightarrow D(0) \geq 10.$$

Scegliamo $\boxed{D_1(s) = 10}$

Bode per $\frac{10}{(s+1)^3} = D_1(s)G(s) \Rightarrow$



Si può usare una rete RITARDATRICE per abbassare il guadagno in $\omega_c = 1$ (e di conseguenza rendere inferiore la frequenza di attraversamento, che da CIRCA 10 va portata a $\omega_c = 1$).

Poiché a $\omega = 1 \Rightarrow 180° - 135° = 45°$, e possiamo permettere un abbassamento di fase al MAX di 5°. Ciò è possibile, perché la rete introduce un aumento di fase, ma rendibile piccolo a piacere se polo e zero sono scelti (in modulo) sufficientemente piccoli rispetto a $\omega_c = 1$.

Quindi $\boxed{D(s) = \frac{10(1+sT_1)}{1+sT_2}}$ con $\boxed{T_2 > T_1 \gg 1}$

Ridurre il t_r equivale ad aumentare la banda passante ad anello chiuso e quindi ω_c. Ridurre la sovraelongazione significa aumentare il margine di fase. Quindi $\boxed{\text{a) INVARIATA, b) } \omega_c \text{ più grande, c) PM più grande}}$.

VERSIONE B: In maniera analoga si trova $\left(G(s) = \frac{1}{1000} \frac{1}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^3}\right)$

$\boxed{D_1(s) = 10'000}$

dopodiché il ragionamento è esattamente analogo, e

$\boxed{D(s) = \frac{10^4(1+sT_1)}{(1+sT_2)}}$ con $\boxed{T_2 > T_1 \gg \frac{1}{10}}$

FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2002-2003)

compito del 16 luglio 2003

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Corso di laurea: ______________________________ Docente: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.

Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

$\boxed{\text{Tema A}}$

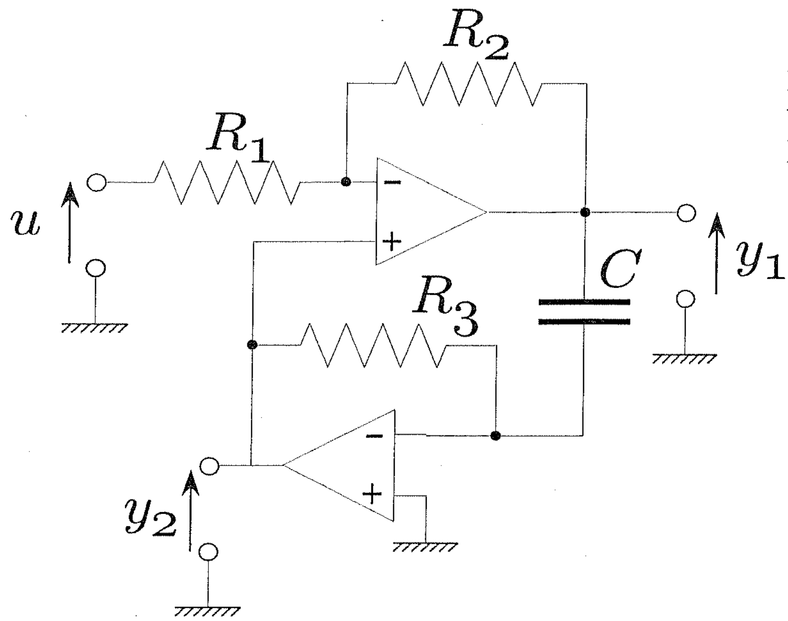


Fig. 1: schema per l'esercizio 1.

Esercizio 1. Si consideri lo schema riportato in Fig. 1, dove gli amplificatori operazionali sono supposti ideali. È richiesto di:

1. calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$ tra u e y_1;
2. calcolare la funzione di trasferimento $G_2(s)$ tra u e y_2;
3. supponendo $R_1 = C = 1$, calcolare R_2 ed R_3 in modo tale che il guadagno statico di $G_1(s)$ sia -1, e l'unico modo presente nel sistema sia e^{-t}.

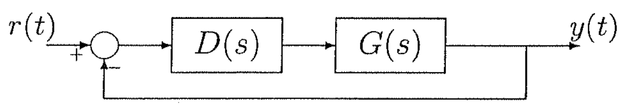


Fig.2: Schema di controllo per gli esercizi 2, 3, 4

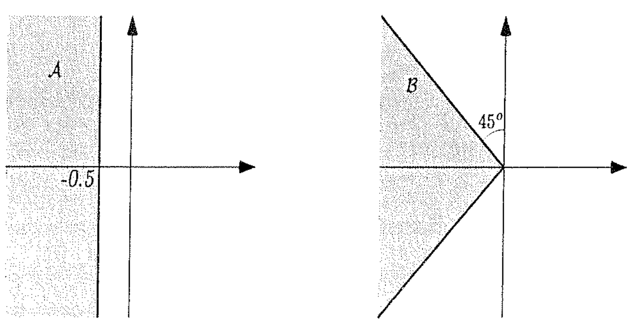


Fig. 3: Regioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ per l'esercizio 2.

Esercizio 2. Si consideri lo schema in Fig. 2 e si supponga che $D(s) = K$ e sia

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s(s+2)}.$$

1. si tracci il luogo delle radici per $K > 0$ (si determinino in particolare gli eventuali asintoti e punti doppi);
2. si determini per che valori di K i poli del sistema ad anello chiuso appartengono alla regione $\mathcal{A}$ di Fig. 3;
3. (**facoltativo**) si determini per che valori di K i poli del sistema ad anello chiuso appartengono alla regione $\mathcal{B}$ di Fig. 3.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della Fig. 2 dove $D(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{s}{1 - as + 4s^2},$$

dove a é un parametro reale soggetto al vincolo $0 < a \leq 4$.

1. Si traccino i diagrammi di Bode (asintotici ed un abbozzo di quelli reali) e di Nyquist di $G(s)$, per $a = 0.1, 2, 4$.
2. Ricorrendo al criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a catena chiusa, al variare dei parametri $0 < a \leq 4$ e $K \neq 0$ (sia $K > 0$ che $K < 0$).

Esercizio 4. Si consideri lo schema di controllo di Fig. 2. La risposta al gradino unitario di $G(s)$ è riportata in Fig. 4.

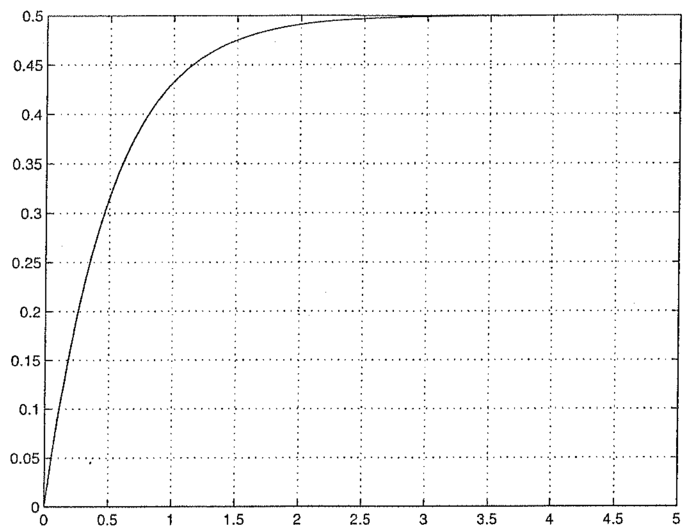


Figure 4: Risposta al gradino di $G(s)$ nell'esercizio 4.

1. Si determini la più semplice struttura di $G(s)$ compatibile con la risposta al gradino di Fig. 4;
2. utilizzando il metodo della sintesi in frequenza (di Bode), si determini la struttura di un controllore $D(s)$ che garantisca che le seguenti specifiche siano soddisfatte:
   a. il sistema controllato sia di tipo 1 ed abbia errore a regime in risposta ad una rampa unitaria $|e_{r,0}| \leq 0.1$;
   b. la pulsazione di attraversamento sia $\omega_c = 1000$ rad/s;
   c. il margine di fase risultante sia $PM \geq 40^o$;
3. utilizzando il criterio di Routh o il criterio di Nyquist si dimostri che il sistema in catena chiusa controllato con $D(s)$ progettato al punto precedente è BIBO stabile.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2002-2003)

compito del 16 luglio 2003

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Corso di laurea: ______________________________ Docente: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.

Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Tema B

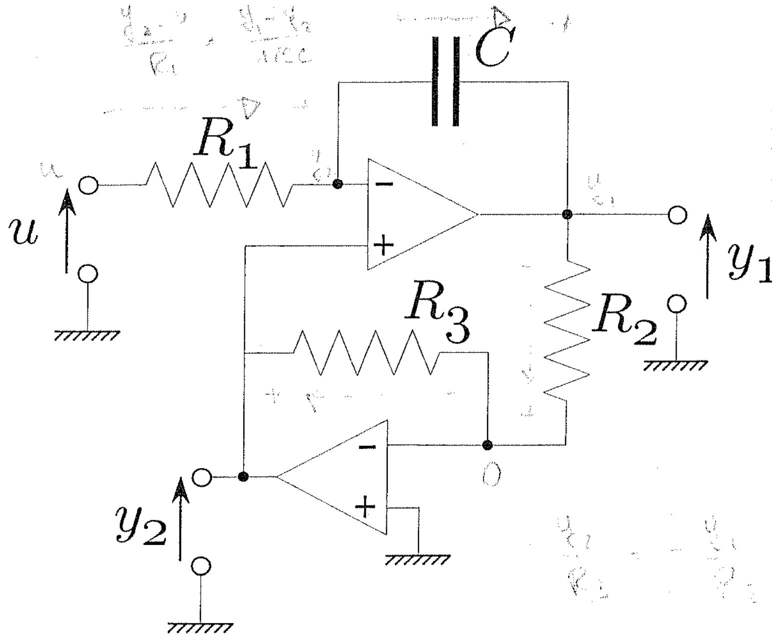


Fig. 1: schema per l'esercizio 1.

Esercizio 1. Si consideri lo schema riportato in Fig. 1, dove gli amplificatori operazionali sono supposti ideali. È richiesto di:

1. calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$ tra u e y_1;
2. calcolare la funzione di trasferimento $G_2(s)$ tra u e y_2;
3. supponendo $R_3 = C = 1$, calcolare R_2 ed R_1 in modo tale che il guadagno statico di $G_1(s)$ sia -1, e l'unico modo presente nel sistema sia e^{-t}.

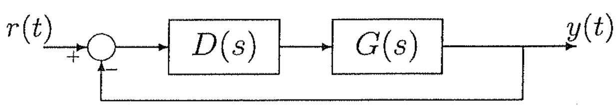


Fig.2: Schema di controllo per gli esercizi 2, 3, 4

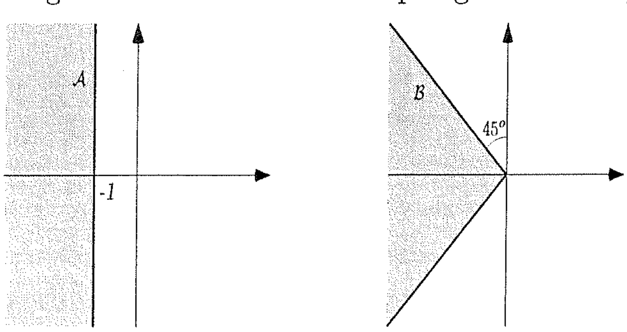


Fig. 3: Regioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ per l'esercizio 2.

Esercizio 2. Si consideri lo schema in Fig. 2 e si supponga che $D(s) = K$ e sia

$$G(s) = \frac{s^2+4}{s(s+4)}.$$

1. si tracci il luogo delle radici per $K > 0$ (si determinino in particolare gli eventuali asintoti e punti doppi);
2. si determini per che valori di K i poli del sistema ad anello chiuso appartengono alla regione $\mathcal{A}$ di Fig. 3;
3. (**facoltativo**) si determini per che valori di K i poli del sistema ad anello chiuso appartengono alla regione $\mathcal{B}$ di Fig. 3.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della Fig. 2 dove $D(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{s}{1 - as + s^2},$$

dove a é un parametro reale soggetto al vincolo $0 < a \leq 2$.

1. Si traccino i diagrammi di Bode (asintotici ed un abbozzo di quelli reali) e di Nyquist di $G(s)$, per $a = 0.1, 1, 2$.
2. Ricorrendo al criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a catena chiusa, al variare dei parametri $0 < a \leq 2$ e $K \neq 0$ (sia $K > 0$ che $K < 0$).

Esercizio 4. Si consideri lo schema di controllo di Fig. 2. La risposta impulsiva di $G(s)$ è riportata in Fig. 4.

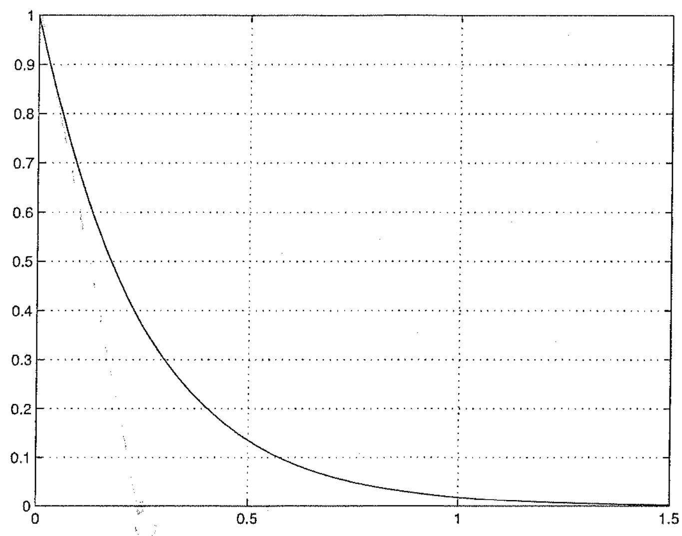


Figure 4: Risposta impulsiva di $G(s)$ nell'esercizio 4.

1. Si determini la più semplice struttura di $G(s)$ compatibile con la risposta impulsiva di Fig. 4;
2. utilizzando il metodo della sintesi in frequenza (di Bode), si determini la struttura di un controllore $D(s)$ che garantisca che le seguenti specifiche siano soddisfatte:
   a. il sistema controllato sia di tipo 1 ed abbia errore a regime in risposta ad una rampa unitaria $|e_{r,0}| \leq 0.1$;
   b. la pulsazione di attraversamento sia $\omega_c = 2000$ rad/s;
   c. il margine di fase risultante sia $PM \geq 30^o$;
3. utilizzando il criterio di Routh o il criterio di Nyquist si dimostri che il sistema in catena chiusa controllato con $D(s)$ progettato al punto precedente è BIBO stabile.

$\boxed{\text{EX } 1-A}$ Per il primo OP-AMP, $v_- = v_+ = y_2$, quindi

$$\frac{u - y_2}{R_1} = \frac{y_2 - y_1}{R_2}$$

Per il secondo si ha $v_- = 0$, quindi:

$$y_1 s C = -\frac{y_2}{R_3} \quad \left(\text{si ricorda che } y_1 s C \text{ proviene da } C\frac{dy_1}{dt} \to \text{LAPLACE} \right)$$

Manipolando tali equazioni:

$$y_1(s) = -\frac{R_2}{R_1} \, \frac{1}{1 + s R_3 C\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)} \, u(s) = G_1(s)\, u(s)$$

$$y_2(s) = C\frac{R_3 R_2}{R_1} \, \frac{s}{1 + s R_3 C\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)} \, u(s) = G_2(s)\, u(s)$$

$$R_1 = C = 1 \Rightarrow \quad G_1(0) = -R_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{denominatore} = 1 + s\tau \text{ con } \tau = R_3(1 + R_2) = 1 \Rightarrow R_3 = \frac{1}{2}$$

$\boxed{1-B}$ In maniera analoga:

$$G_1(s) = -\frac{R_2}{R_3} \, \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) s C R_1} , \qquad G_2(s) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) s C R_1}$$

$$R_3 = C = 1 \Rightarrow G_1(0) = -R_2 = -1 \Rightarrow R_2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{den.} = 1 + s\tau \text{ con } \tau = R_1(1 + R_2) = 1 \Rightarrow R_1 = 1/2$$

DALL'ULTIMA PAGINA

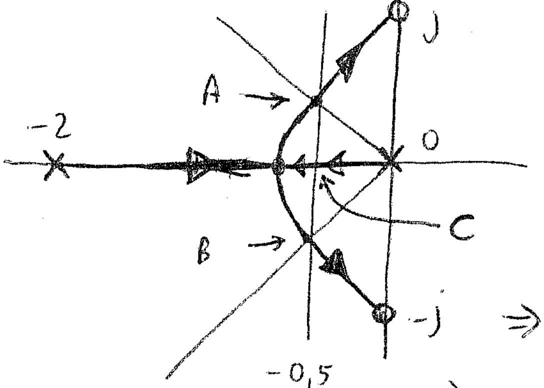
$\boxed{4-B}$ $G(s) = \frac{K}{s+a} \Rightarrow$ RISP. IMP. $y(t) = K e^{-at} \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = -aK = -4 \text{ (FIGURA)} \\ y(0) = K = 1 \text{ (FIGURA)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} K = 1, \\ a = 4 \end{matrix}$

$G(s) = \frac{1}{s+4}$ – A questo punto la procedura è del tutto analoga a quella utilizzata nella VERSIONE $\boxed{\text{EX } 4-A}$ –

no ASINTOTI (gradi uguali)

P. DOPPI: $2s^2(s+2) = (s^2+1)(2s+2) \Rightarrow s^2 - s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \cong 1.6 \\ \cong -0.6 \end{cases}$

Ovviamente solo $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ appartiene al luogo (intervallo reale $[-2 \ \ 0]$).



Calcoliamo INT. con regione $\mathcal{A}$: deve essere $\Re s = -\frac{1}{2}$, cioè $s = -\frac{1}{2} + j\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario.

$$\begin{cases} (s^2+2s) + K(s^2+1) = 0 \\ s = -\frac{1}{2} + j\alpha \Rightarrow \text{sostituendo nella prima:} \end{cases}$$

$$\Rightarrow j\alpha(1-K) + \left[K\left(\frac{5}{4} - \alpha^2\right) - \left(\frac{3}{4} + \alpha^2\right)\right] = 0$$

$\Rightarrow$ uguagliando a zero $\Re$ e $\Im$:

$\alpha = 0 \Rightarrow K = \frac{3}{5}$

oppure $K = 1 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}$

Si trova cioè il punto C $\left(\alpha = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2}\right)$ per $K = \frac{3}{5}$, ed i punti A, B $\left(\alpha = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\right)$ per $K = 1$. È facile rendersi conto che i poli sono dentro $\mathcal{A}$ per $\boxed{\frac{3}{5} \le K \le 1}$

Calcoliamo INT. con regione $\mathcal{B}$: deve essere $\Re = \pm \Im$. Consideriamo allora $s = x(1+j)$, $x < 0$ (l'altro punto, $s = x(1-j)$, lo troviamo come complesso coniugato.

$(s^2+2s) + K(s^2+1) = 0$

$s = x(1+j) \Rightarrow$ sostituendo nella prima: $(2x+K) + 2j(x^2+x+Kx^2) = 0 \Rightarrow$ uguagliando a zero $\Re$ e $\Im \Rightarrow K = -2x$ e $x(1+x-2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow K = 0$

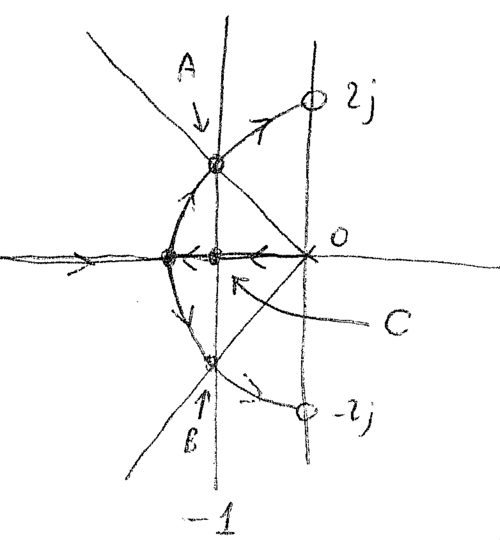
$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow K = -2$ NON ACCETTABILE $(K>0)$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow K = 1$

Quindi ho i punti 0 $(K=0, s=0)$ e $-\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$ $(K=1)$, cioè i punti A e B. Quindi per $\boxed{0 \le K \le 1}$ i poli stanno dentro $\mathcal{B}$.

$\boxed{2-B}$ $p(s) = (s^2+4s) + K(s^2+4)$.

ANALOGO: P. DOPPI $\Rightarrow s^2 - 2s - 4 = 0 \Rightarrow s = 1 \pm \sqrt{5} \begin{cases} 3,2 \\ -1,2 \text{ UNICO ACCETTABILE} \end{cases}$



REGIONE $\mathcal{A}$: $\begin{cases} (s^2+4s) + K(s^2+4) = 0 \\ s = -1 + j\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow$ si trova $s = -1$ per $K = \frac{3}{5}$, $s = -1 \pm j$ per $K = 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{5} \le K \le 1}$ (PUNTO C) (PUNTI A e B)

REGIONE $\mathcal{B}$: procedendo come per $\boxed{\text{EX 2-A}}$, si trova:

$K = -\cancel{2}x$ e $x(1+x-2x^2) = 0 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$K = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow s = 0$

$K = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow s = -1 \pm j$ (stessi punti A e B).

$\Rightarrow \boxed{0 \le K \le 1}$

$G(s) = \frac{\quad}{1-as+4s^2}$, $0 < a \le 4$ _ si ha $\omega_n = \frac{1}{2}$, $\xi = -\frac{a}{4}$ $(0 < |\xi| \le 1)$

Essendo $\xi < 0$ ⇨ $G_+ = 2$ (instabile) ha inoltre andamento FASE OPPOSTO al caso $\xi > 0$

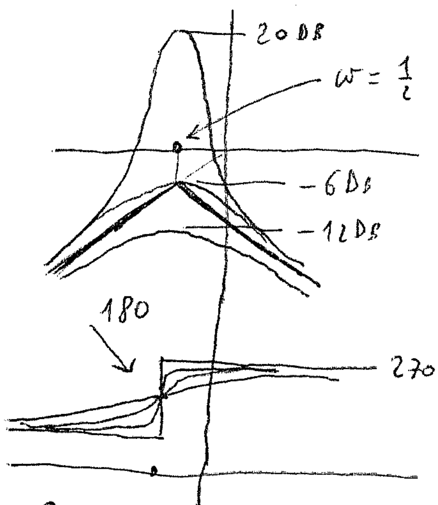
DIAGRAMMA REALE: o con studio di funzione di $|G(j\omega)|^2$, o solo per motivi di SIMMETRIA, si vede che il MAX $|G(j\omega)|$ si ha per $\omega = \frac{1}{2}$, e che vale:

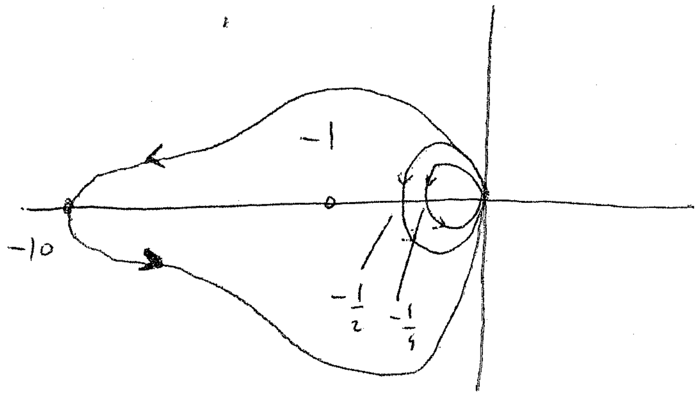
$$|G(j\tfrac{1}{2})| = \frac{1}{a} \quad , \quad \arg G(j\tfrac{1}{2}) = 180°\_$$

Per $a = 0.1 \Rightarrow$ MODULO $= 10 \Rightarrow$ PICCO RISONANZA 20 dB

$a = 2 \Rightarrow$ MODULO $= \frac{1}{2} \Rightarrow$ PICCO " -6 dB

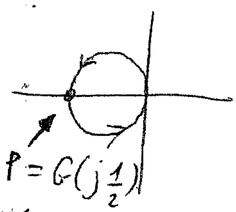
$a = 4 \Rightarrow$ MODULO $= \frac{1}{4} \Rightarrow$ PICCO " ASSENTE (-12 dB)





Cercando, in generale, l'intersezione di NYQUIST con l'asse reale, cioè annullando

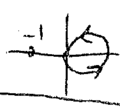
$\text{Im} \frac{j\omega K}{1 - a j\omega - 4\omega^2} = 0$, si trova $\omega = \frac{1}{2}$ e $\boxed{P = -\frac{K}{a}}$ ⇨



Quindi: $K > a \Rightarrow$ $m_{GIRI} = 2$, $G_+ = 2 \Rightarrow W_+ = \emptyset \Rightarrow$ STABILE

$K = a \Rightarrow$ PASSA SOPRA -1 ⇨ W (SI poli IMM. PURI) ⇨ INSTAB.

$0 < a < K$ ⇨ $m_{GIRI} = \emptyset$, $G_+ = 2 \Rightarrow W_+ = 2 \Rightarrow$ INSTABILE

$K < 0$ ⇨  ⇨ $m_{GIRI} = \emptyset$, $G_+ = 2 \Rightarrow W_+ = 2 \Rightarrow$ INSTABILE

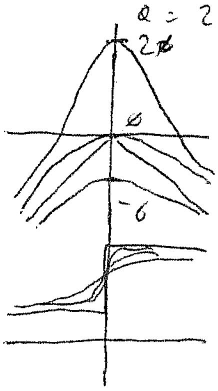
CONCLUSIONE: $\boxed{\text{STABILE} \Leftrightarrow K > a}$

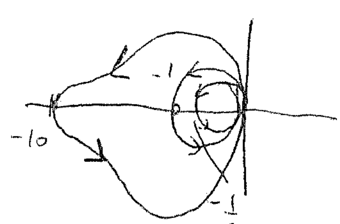
3-B ANALOGO: $\omega_n = 1$, $\xi = -\frac{a}{2}$, $|\xi| \le 1$ _ MAX $|G(j\omega)|$ per $\omega = 1$ e vale $+\frac{1}{a}$, e $\arg(G(j1)) = 180°$_

$a = 0,1 \Rightarrow$ MOD $= 10$ (20 dB)

$a = 1 \Rightarrow$ MOD $= 1$ ($\emptyset$ dB)

$a = 2 \Rightarrow$ MOD $= 1/2$ (-6 dB)





Di nuovo $P = -\frac{K}{a}$ ⇨ stesse conclusioni $\boxed{\text{EX 3-A}}$, cioè: $\boxed{\text{STABILE} \Leftrightarrow K > a}$

$s+a$ $\qquad a(1-e$

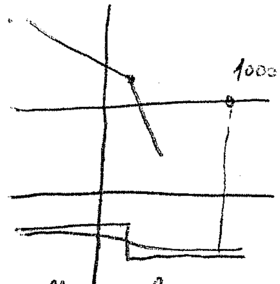
$\Rightarrow y'(0) = K = 1$ (vedi FIGURA, retta TANGENTE) $\Big\}$ $\Rightarrow K = 1,\ a = 2$

$\Rightarrow y(\infty) = \frac{K}{a} = \frac{1}{2}$ (vedi FIGURA)

$$G(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{s}{2}}$$

$$D_1(s) = \frac{K}{s} \Rightarrow D_1(s)G(s) = \frac{K}{2}\,\frac{1}{s(1+\frac{s}{2})} \Rightarrow \frac{2}{K} \le 0.1 \Rightarrow K \ge 20 \Rightarrow \text{scegliamo } K = 20$$

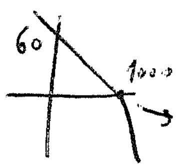
$$\boxed{D_1(s) = \frac{20}{s}} \Rightarrow D_1(s)G(s) = \frac{10}{s(1+\frac{s}{2})}$$



BISOGNA: alzare guadagno, aumentare PM. Una soluzione è RETE ANTICIPATRICE. Una soluzione "ad occhio" è cancellare il polo con uno zero e mettere un polo ~~~~ "vicino" a $\omega_A = 1000$, oltre ad alzare il guadagno per fare il punto attraversamento.

$$D_2(s) = \frac{K(1+\frac{s}{2})}{1+\frac{s}{1000}} \quad \text{(rete ANT)} \Rightarrow D_1D_2G = \frac{10K}{s(1+\frac{s}{1000})}$$

da cui $K = 100$ fa così $\Rightarrow$



con $PM \cong 45°$.

$$D(s) = D_1D_2 = \frac{2000}{s}\,\frac{1+s/2}{1+s/1000}$$

STABILITÀ: ROUTH $\Rightarrow$ proviamo che $\forall\, D(s) = \frac{K}{s}\,\frac{1+sT}{1+\alpha sT}$ con $K>0,\ T>0,\ 0<\alpha<1$, è stabile.

$$DG = \frac{K(1+sT)}{s(1+\alpha sT)(s+2)} \Rightarrow p(s) = \alpha T s^3 + s^2(2\alpha T+1) + s(2+KT) + K$$

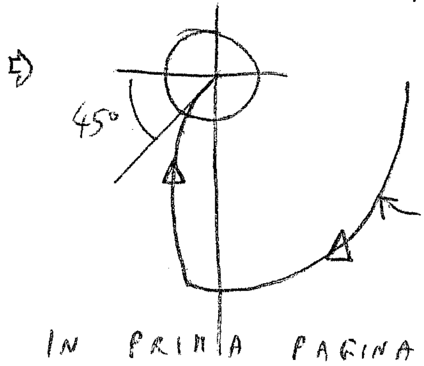
αT	$2+KT$
$2\alpha T+1$	K
M	
K	

$$M = \frac{KT(1-\alpha) + 2 + 4\alpha T + 2\alpha K T^2}{1+2\alpha T} > 0$$

$\Rightarrow$ TUTTI POSITIVI $\Rightarrow$ C.V.D.

NYQUIST $\Rightarrow$ usando $D(s) = \frac{2000}{s}\,\frac{1+s/2}{1+s/1000} \Rightarrow DG = \frac{1000}{s(1+s/1000)}$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow n_{GIRI} = \emptyset,\ G_+ = \emptyset \Rightarrow W_+ = \emptyset$

⊗ CONTINUA IN PRIMA PAGINA

FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2002-2003)

compito dell'8 settembre 2003

Esercizio 1. Si consideri lo schema di Fig. 1, dove $R = 2$, $L = C = 1$.

1. Supponendo **ideale** l'amplificatore operazionale, si determini la funzione di trasferimento $W(s)$ tra $u(t)$ ed $y(t)$.
2. Si dica, motivando la risposta, se la $W(s)$ determinata al punto precedente può essere la funzione di trasferimento di un sistema dinamico causale, lineare, tempo invariante.
3. Si supponga ora l'operazionale non piú dotato di guadagno infinito, ma caratterizzato dalla funzione di trasferimento
$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$
tra $v_0(t) := [v_+(t) - v_-(t)]$ ed $y(t)$. Si dimostri che il sistema complessivo é instabile.

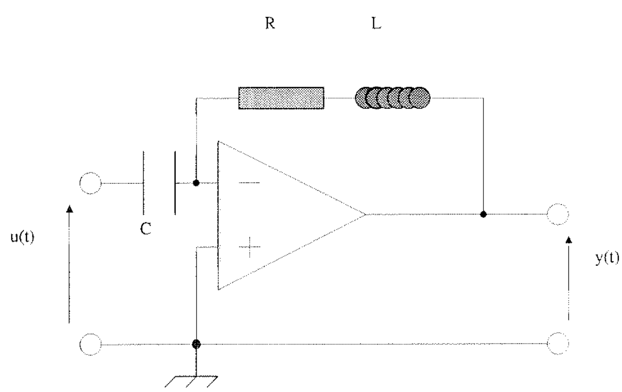


Fig.1: Schema per l'esercizio 1.

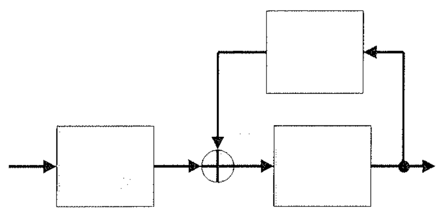
Soluzione

1. $W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}$, dove $Z_1 = \frac{1}{sC}$ e $Z_2 = R + sL$. Ció si verifica facilmente ponendo $v_- = 0$ ed imponendo l'uguaglianza delle correnti sui due rami. Quindi $W(s) = -s(s+2)$.

2. La f.d.t. é impropria (grado num = 2, grado den = 0), e non corrisponde quindi a nessun sistema fisico reale. Ció é diretta conseguenza del fatto che l'operazionale é stato supposto ideale. Nel caso di operazionale reale, ció non potrebbe certamente accadere.
3. Si trovano facilmente le due equazioni

$$\begin{cases} -V_-(s) = -\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}U(s) - \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}Y(s) \\ \\ Y(s) = G(s)[-V_-(s)] \end{cases}$$

che corrispondono allo schema di figura, da cui la f.d.t. ad anello aperto $\frac{10}{(s+1)^3}$, che retroazionata dá luogo ad un sistema instabile, come si verifica facilmente con Routh o con Nyquist. In tal caso, come preannunciato nel punto 2., si verifica anche che $W(s)$ diventa strettamente propria.



Esercizio 2. Si consideri lo schema in Fig. 2. Siano $D(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s-4)^2}.$$

1. Si tracci il luogo delle radici per $K > 0$, individuando in particolare asintoti e punti doppi
2. Si determini il valore di K a cui corrisponde un polo dell'origine, ed il valore di tutti i poli per tale valore di K
3. **(facoltativo)** Si calcoli la risposta impulsiva del sistema ad anello chiuso corrispondente allo stesso valore di K determinato al punto precedente

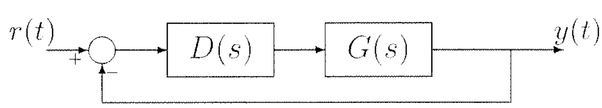
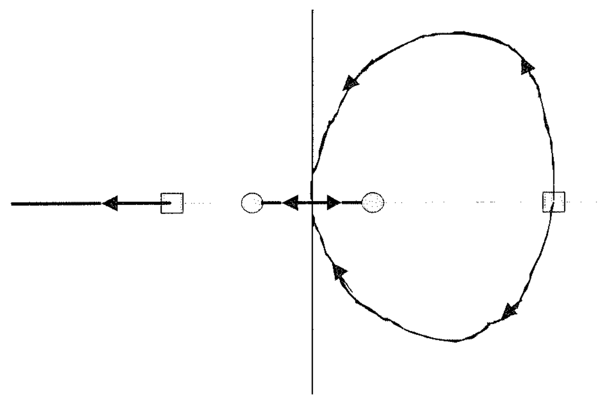


Fig.2: Schema di controllo per gli esercizi 2, 3, 4

Soluzione

1. c'é un unico asintoto (a -180^o) ed il calcolo dei punti doppi fornisce $s = 0, 4, -2 \pm 3j$. Questi ultimi due valori sono da scartare perche' corrispondono ad un valore di K non reale. $s = 4$ é un polo doppio *di partenza*, mentre $s = 0$ é l'unico punto doppio corrispondente ad un valore positivo di K.



2. per $s = 0$ si ha $p(s) = d(s) + Kn(s) = d(0) + Kn(0) = 32 - K$ che si annulla solo per $K = 32$. Per tale valore di K si ottiene $p(s) = s^2(s+26)$, per cui i tre poli sono $s = 0, 0, -26$.
3. la f.d.t. ad anello chiuso corrispondente é

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2(s + 26)}$$

che sviluppata in frazioni parziali fornisce

$$W(s) = -\frac{1}{26}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{26^2}\frac{1}{s} + (1 - \frac{1}{26^2})\frac{1}{s + 26}$$

da cui

$$w(t) = [-\frac{1}{26}t + \frac{1}{26^2} + (1 - \frac{1}{26^2})e^{-26t}]\delta_{-1}(t)$$

Esercizio 3. Si consideri lo schema della Fig. 2 dove $D(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{(s + 1)^2}{s(s - 1)^2}\ .$$

1. Si disegni il diagramma di Nyquist di $G(s)$, evidenziandone le intersezioni con l'asse delle ascisse

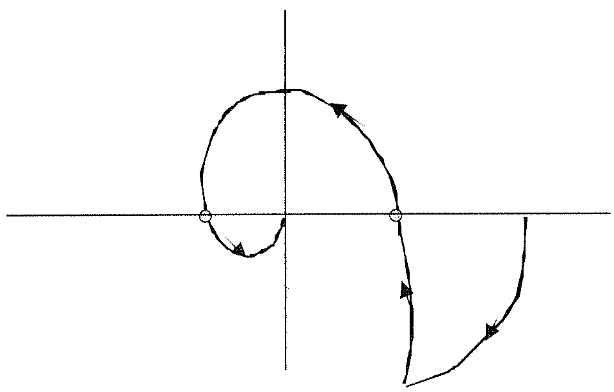
2. Ricorrendo al criterio di Nyquist, si studi la stabilità ad anello chiuso al variare di $K > 0$.

Soluzione

1. annullando la parte immaginaria si ottengono le intersezioni con l'asse citato:

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \Rightarrow G(j\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \tilde{=} 2,4$$
$$\omega = \omega_2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow G(j\omega_2) = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \tilde{=} -0,4$$

e quindi il diagramma di Nyquist é facile da disegnare, notando che il modulo é sempre decrescente mentre la fase cresce da -90^o a $+270^o$. Per completezza, per $\omega = 1$ il diagramma interseca l'asse immaginario nel punto $G(j1) = j$, e per $\omega \to \infty$ il diagramma presenta un asintoto verticale passante per il punto 4.



2. É evidente che per $K > 1 + \sqrt{2}$ il diagramma compie -2 giri attorno a -1, ed essendo $G_+ = 2$, si ha $W_+ = 0$ e quindi stabilitá BIBO. Per $K = 1 + \sqrt{2}$, il diagramma passa per -1 e ci sono poli immaginari puri, per $K < 1 + \sqrt{2}$ il diagramma non compie giri attorno a -1, ed essendo $G_+ = 2$ si ha anche $W_+ = 2$, e quindi instabilitá. Riassumendo, si ha stabilitá se e solo se $K > 1 + \sqrt{2}$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema di controllo di Fig. 2 e sia

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \, .$$

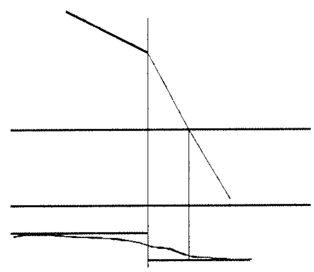
Giustificando la risposta, si determini la struttura di un compensatore $D(s)$ che stabilizzi il sistema in catena chiusa e soddisfi alle seguenti specifiche:

$$a)\ \omega_c = 10, \quad b)\ PM \geq 40^o, \quad c) \text{ sistema di tipo 1 con } |e_{rp}| \leq 0.01$$

dove e_{rp} è l'errore a regime permanente in risposta alla rampa unitaria.

Soluzione

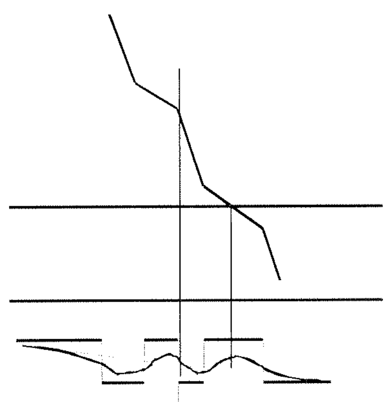
É evidente la necessitá, per il requisito c), di introdurre un integratore del tipo $D^1(s) = \frac{100}{s}$. Dal diagramma di Bode per $D^1(s)G(s)$ si evince che ω_c assume praticamente il valore desiderato, mentre il PM é inaccettabile (troppo piccolo). É necessario quindi introdurre un aumento di fase nelle prossimitá di $\omega_c = 10$.



A tal scopo si puó in primo luogo aumentare il guadagno (il che non contrasta, anzi, con il requisito c)), e quindi ricorrere all'uso di una rete a sella $D^2(s)$ che abbia $\omega_c = 10$ posizionato a metá strada (in senso logaritmico) tra il secondo zero ed il secondo polo. Cosí si puó lasciare invariato (unitario) il guadagno in $\omega_c = 10$, migliorando quel tanto che basta il PM. Una possibile soluzione é:

$$D(s) = D^1(s)D^2(s) = \frac{100\sqrt{10}}{s} \frac{(1 + 10s)(1 + \frac{s}{\sqrt{10}})}{(1 + 100s)(1 + \frac{s}{10\sqrt{10}})}$$

Con tale scelta, si ottiene $\omega_c \cong 10$ (con un errore inferiore al 5 per mille) con un $PM \cong 55^o$.



Compito di Fondamenti di Automatica del 24 settembre 2003

Esercizio 1. Dato lo schema meccanico in Fig.1 ($u(t)$ é la posizione d'ingresso, $y(t)$ quella d'uscita, rispetto alla posizione con molla a riposo, corrispondente a $u = y = 0$, $m = 1$ la massa dell'oggetto, $k = 2$ la costante elastica della molla, $\gamma = 2$ il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore), é richiesto di:

1. Calcolare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$;
2. Calcolare la risposta a regime permanente al segnale $u(t) = sin(\omega_n t)$, dove ω_n é la pulsazione naturale non smorzata del sistema;
3. **(Facoltativo)** Calcolare la pulsazione ω_r che massimizza $|G(j\omega)|$.

Soluzione. Si perviene a $m\frac{d^2y}{dt^2} = k(u-y)+\gamma(\frac{du}{dt}-\frac{dy}{dt})$, da cui $G(s) = \frac{\gamma}{m}\frac{s+\frac{k}{\gamma}}{s^2+\frac{\gamma}{m}s+\frac{k}{m}}$, cioé $G(s) = 2\frac{s+1}{s^2+2s+2}$, da cui $\omega_n = \sqrt{2}\simeq 1.41$ e $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.71$. Risulta poi $|G(j\omega)|^2 = 4\frac{\omega^2+1}{\omega^4+4}$, che annullando la derivata rispetto ad ω fornisce $\omega_r = \sqrt{\sqrt{5}-1}\simeq 1.11$ e $|G(j\omega_r)| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\simeq 1.27$. Infine, $|G(j\omega_n)| = \sqrt{\frac{3}{2}}\simeq 1.22$ e $arg(G(j\omega_n)) = -arctg(\frac{\sqrt{2}}{2})\simeq -0.62$, per cui $y(t)\simeq 1.22 sin(1.41t - 0.62)$.

Esercizio 2. Dato il solito schema in retroazione con $G(s)$ e $D(s)$, sia $G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$. É richiesto di:

1. Tracciare il luogo delle radici ($D(s) = k, k > 0$), determinando in particolare eventuali asintoti e punti doppi;
2. Tracciare il luogo delle radici, determinando in particolare eventuali asintoti e punti doppi, nell'ipotesi che venga utilizzata una rete anticipatrice $D(s) = k\frac{s+1}{s+3}, k > 0$;
3. Nelle stesse ipotesi del punto precedente, determinare i valori di $k > 0$ tali che i poli ad anello chiuso sono reali.

Soluzione. In Fig.2 sono riportati entrambi i luoghi. Per il secondo, si trova che -3 é il centro degli asintoti, che hanno angoli $\pm 90^o$, mentre i candidati ad essere punti doppi sono -2 e $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\simeq -2.62$ e -0.38. Si vede facilmente che solo -2 e -2.62 sono accettabili, cioé appartengono al luogo positivo. Infine, il valore di k corrispondente a $s = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ é $k = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}\simeq 0.09$, per cui i poli sono reali per $0 < k < 0.09$.

Esercizio 3. Data $G(s) = \frac{(1-s)^3}{s(s^2+s+1)}$, é richiesto di:

1. Tracciare il diagramma asintotico di Bode e calcolare il valore esatto di modulo e fase di $G(j\omega)$ per $\omega = 1$;

2. Tracciare il diagramma di Nyquist (senza calcolarne le intersezioni con gli assi);

3. Studiare la stabilitá ad anello chiuso se $D(s) = k$, al variare del parametro reale k, ricorrendo al criterio di Routh.

Soluzione. In Fig.3 sono riportati i diagrammi di Bode e Nyquist. Il diagramma effettivo é monotono decrescente (con un flesso per $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.71$, dove $|G(j\omega)| = 3$). Per $\omega = 1$ si verifica facilmente che $G(j1) = 2(1+j)$, da cui $|G(j1)| = 2\sqrt{2}$ e $arg\ G(j1) = 45^o$. La tabella di Routh fornisce (essendo $p(s) = s^3(1-k) + s^2(1+3k) + s(1-3k) + k$):

$$\begin{array}{|cc} 1-k & 1-3k \\ 1+3k & k \\ -\frac{8k^2+k-1}{3k+1} & \\ k & \end{array}$$

I punti critici sono $k = 0, 1, -\frac{1}{3} \simeq -0.33, \frac{-1\pm\sqrt{33}}{16} \simeq 0.30, -0.42$, ed é facile rendersi conto che solo per $0 < k < 0.30$ si ha stabilitá (solo permanenze di segno, tutta la prima colonna positiva). A parte va studiato il caso $k = 1$, in quanto $p(s)$ si abbassa di grado. É immediato verificare comunque che per $k = 1$ si ha instabilitá.

Esercizio 4. Data $G(s) = \frac{100}{s+1}$, si vuole progettare $D(s)$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche (e_{rp} rappresenta l'errore a regime al gradino unitario):

$$a)\ |e_{rp}| \leq 0.001 \quad b)\ \omega_c = 100 \quad c)\ PM \geq 60^o.$$

Si spieghi, motivando la risposta, a che tipo di rete é necessario ricorrere.

Soluzione. Occorre incrementare il guadagno (il tipo 0 é sufficiente) di un fattore 10, il che conduce a $\omega_c = 1000$ ed un $PM \simeq 90^o$. Per abbassare ω_c senza modificare il guadagno, e senza deteriorare troppo il PM, é necessaria una rete ritardatrice. Ad esempio $D(s) = \frac{10(1+\frac{s}{10})}{1+s}$ soddisfa tutti i requisiti. In Fig.4 sono riportati i diagrammi di Bode di $G(s)$ e di $D(s)G(s)$.

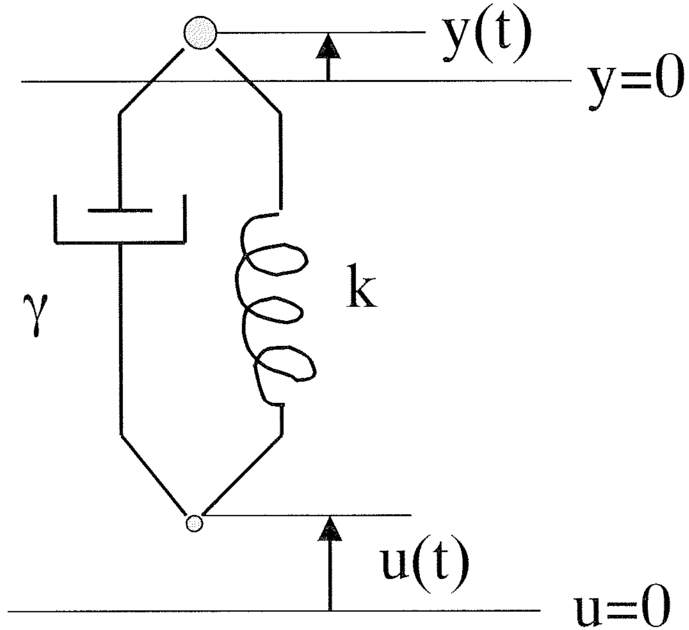


Fig. 1

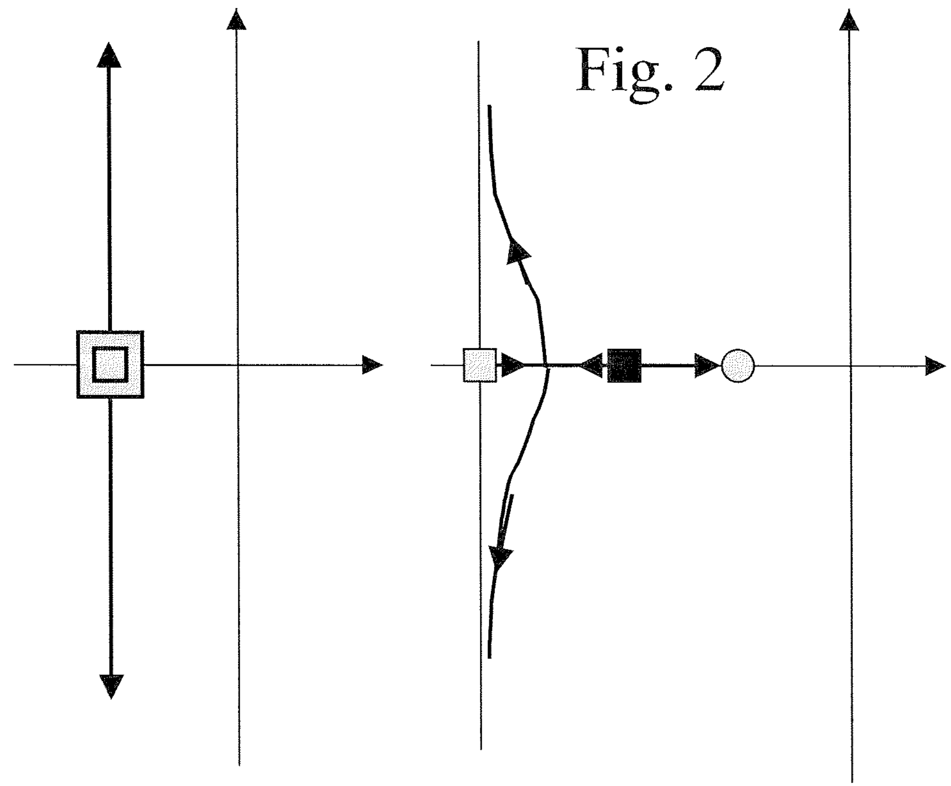


Fig. 2

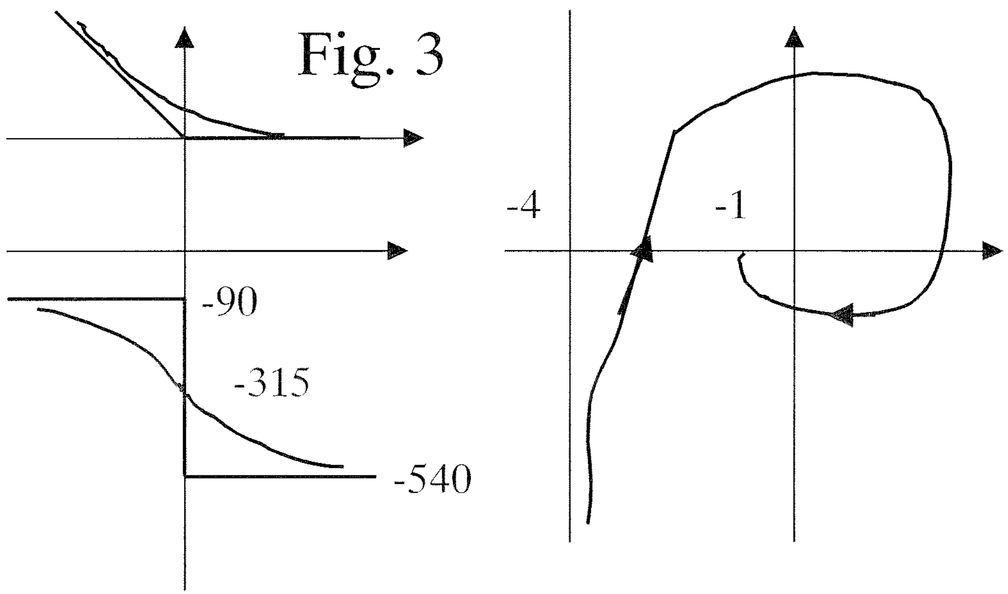


Fig. 3

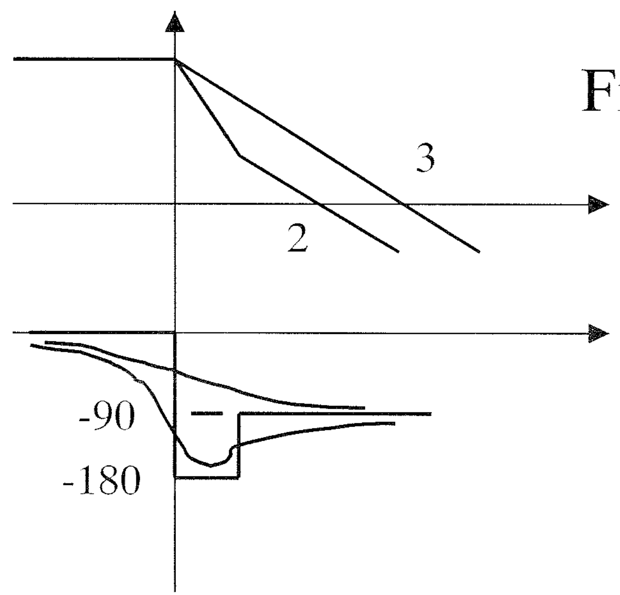


Fig. 4