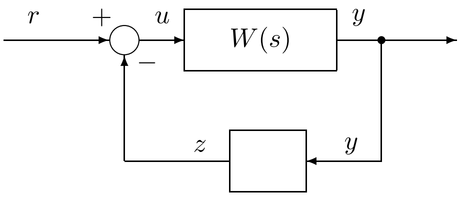
**Prova Scritta di Controlli Automatici del 2.7.2002**
Prof. Zampieri

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ______________

*Non è ammessa la consultazione di libri, dispense, quaderni. Non si può usare la calcolatrice programmabile. Ogni risposta va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.*

**Esercizio 1–[punti 8]**

Si consideri il sistema retroazionato




$$W(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+4)}.$$

**a.** Si tracci il diagramma di Bode e di Nyquist di $W(s)$ determinando le eventuali intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti.

**b.** Si supponga che $z(t) = Ky(t)$. Utilizzando il criterio di Nyquist, determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa e' BIBO stabile.

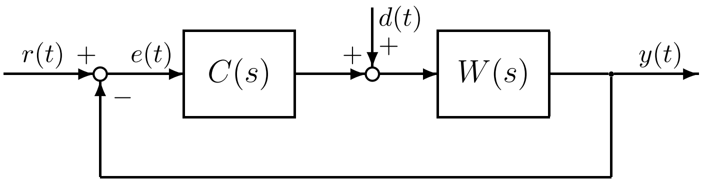
**c.** Si supponga che $z(t) = Kh(y(t))$, dove $h(y)$ è una funzione dispari tale che

$$h(y) = \ln(y-1), \quad y \geq 0.$$

Utilizzando il criterio del cerchio, determinare per quali valori di $K$ il sistema in catena chiusa e' asintoticamente stabile.

**Esercizio-2 [6 pt]**

Si consideri lo schema




dove $C(s) = \frac{K}{s}$, $\quad W(s) = \frac{s+a}{s^2+s+1}$ e dove $a$ e $K$ sono due parametri reali positivi.

1. Si supponga inizialmente che $K = 0$. Si determini il valore del parametro $a$ sapendo che a un ingresso $d(t) = \cos(t)$ il sistema risponde con un'uscita $y(t) = \sqrt{5}\cos(t+\phi)$.
2. Si supponga ora che $K$ sia variabile. Calcolare la funzione di trasferimento a catena chiusa $T(s)$ da $r$ a $y$ In funzione di $K$. Si calcoli inoltre la funzione di sensibilità $S_a^T$ di $T(s)$ al variare del parametro $a$.
3. Supponiamo infine che che $r(t) = 5$ e $d(t) = sin(t)$, $\forall t \geq 0$. Determinare l'errore a regime $e(t)$ corrispondente, al variare di $K$.

**Esercizio-3 [8 pt]**

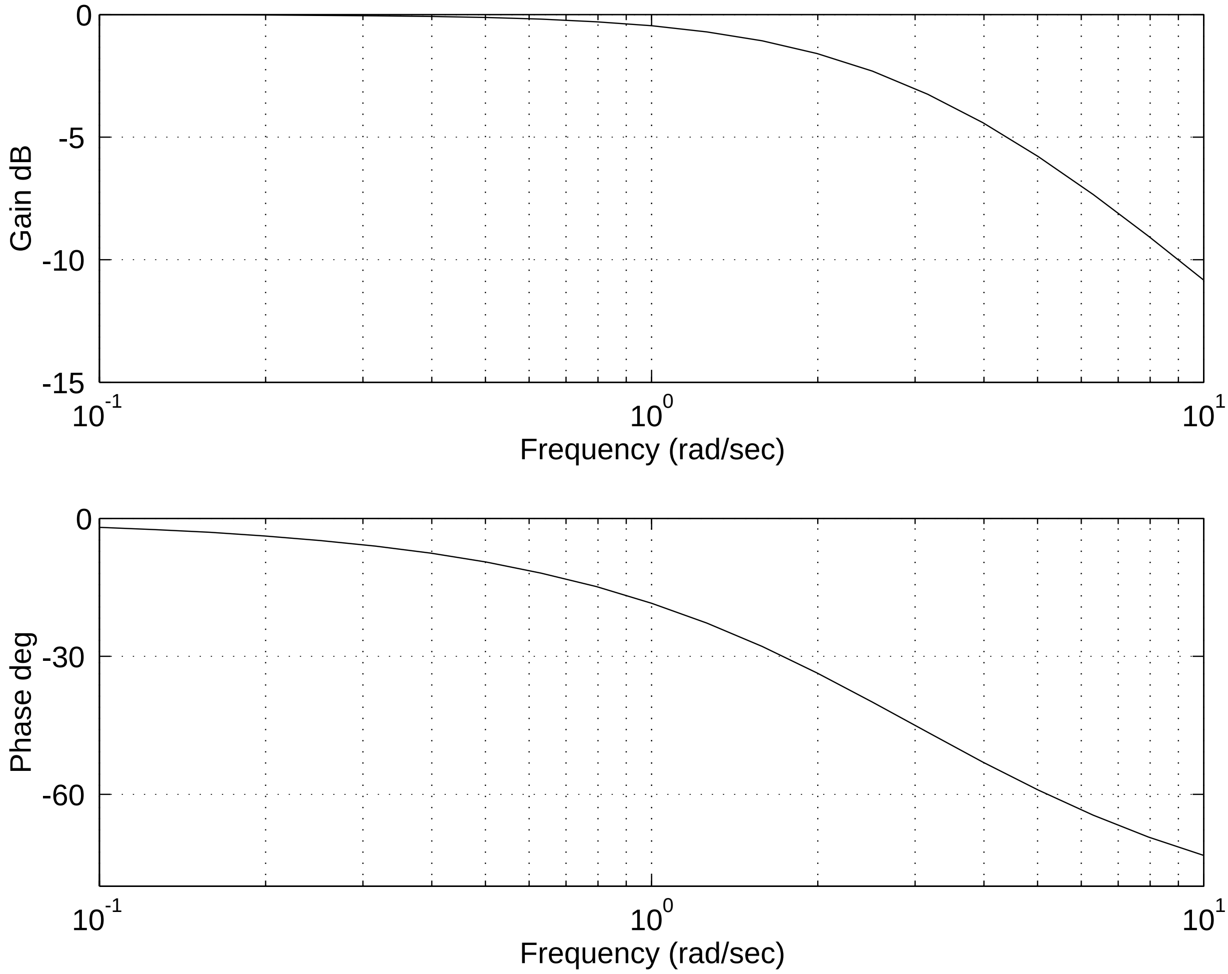
Si consideri lo schema precedente nel quale

$$C(s) = \frac{Ks}{s+2}, \qquad W(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

1. Tracciate il luogo dei poli della funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di $K \geq 0$ (Calcolare gli angoli di uscita dai poli e dagli zeri, eventuali punti doppi, asintoti e intersezioni asse immaginario).
2. Tracciate il luogo dei poli della funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di $K \leq 0$ (Calcolare gli angoli di uscita dai poli e dagli zeri, eventuali punti doppi, asintoti e intersezioni asse immaginario).
3. Calcolare i valori di $K$ tali che tra i modi del sistema a catena chiusa c'e' la funzione $e^{-2t}$.

**Esercizio-4 [4 pt]**

Si consideri un sistema avente diagramma di bode mostrato in figura




Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore $C(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

**a.** errore a regime nullo in risposta al gradino unitario ed errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,2$;

**b.** pulsazione di attraversamento $\omega_A = 5$ rad/s;

**c.** margine di fase $m_\varphi = 45^o$.

Si richiede di determinare il tipo di rete compensatrice (ritardatrice, anticipatrice, a sella) riportandone la funzione di trasferimento senza calcolarne esplicitamente i parametri.

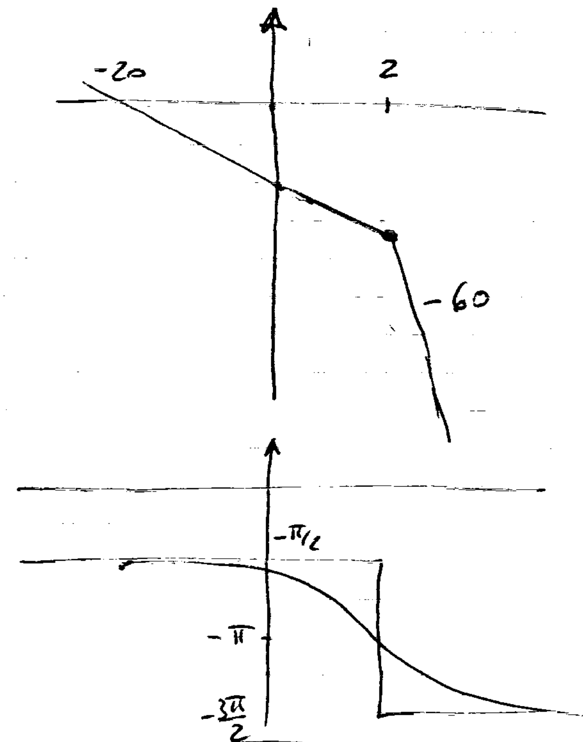
**Esercizio 5–[punti 4]**

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Si determini un compensatore a due parametri (retroazione doppia dall'ingresso $u$ e dall'uscita $y$) tale che i compensatori $C_u(s)$ e $C_y(s)$ abbiano poli in $-2$ e che il sistema a catena chiusa abbia poli in $-1 \pm j$.

# ES 1




**Bode** $\quad W(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}\right)}$

$\left|\frac{1}{4}\right|_{db} = -20\log 4 = -12$

$\omega_n = 2$

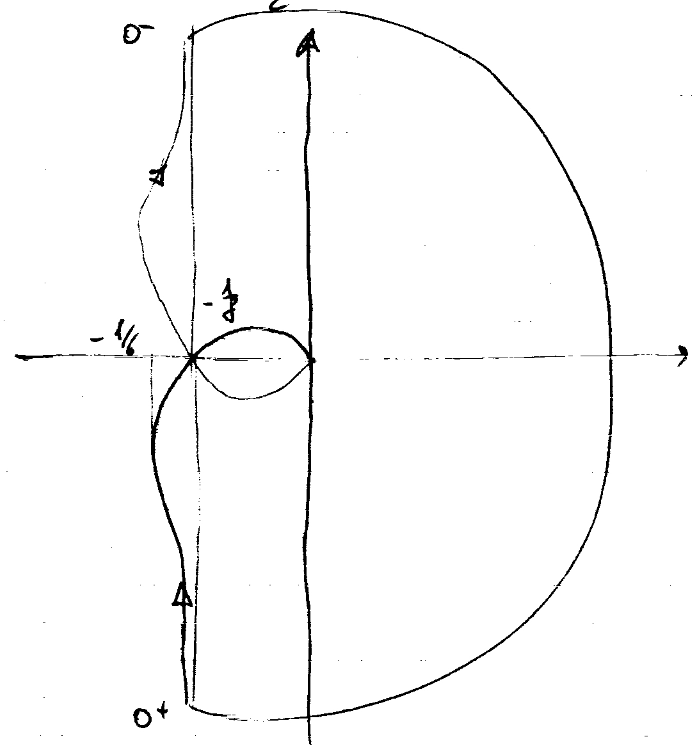
**Nyquist**

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega\left[(4-\omega^2)+2j\omega\right]}$$

$$= \frac{(4-\omega^2)-2j\omega}{j\omega\left[(4-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$$Re = -\frac{2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$Im = \frac{\omega^2-4}{\omega\left[(4-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$




$Re < 0 \quad \forall\omega$

$\omega = 2 \quad Im = 0 \quad Re = -\frac{1}{8}$

$\omega = 0^+ \quad Im = -\infty \quad Re = -\frac{1}{8}$

$$\min Re = \min -\frac{2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2} = -\max \frac{2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2} = -\frac{1}{\min (4-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

Per calcolare tale minimo conviene calcolare il ~~massimo~~ minimo di

$f(x) = (4-x)^2 + 4x \qquad x = \omega^2$

$f'(x) = -2(4-x)+4 \qquad f'(x) = 0 \qquad x = 2 \qquad \omega = \sqrt{2}$

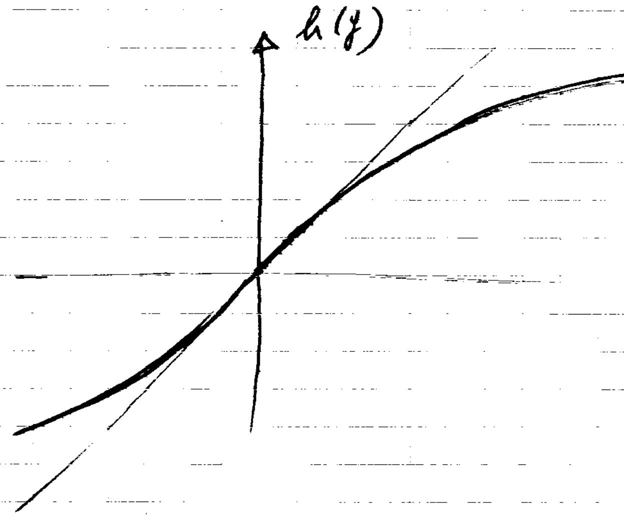
$$\min Re = -\frac{2}{(4-2)^2+4\cdot 2} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Criterio di Nyquist

$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{8}$ stabile $\quad 0<K<8$

$-\frac{1}{8} < -\frac{1}{k} < 0$ instabile $\quad K>8$

Criterio del Cerchio




Il grafico di $h(y)$
quando $k=1$ mostra
che è compreso nel
settore da pendenza 0
a pendenza 1

Quindi per $k$ generico la funzione $h(y)$ è compresa
tra pendenza 0 e pendenza $k$

$$0 < \frac{h(y)}{y} < k \qquad h(0)=0$$

Da Nyquist si deduce che $W(s)+\frac{1}{6}$ è positivo reale
e quindi il settore massimo è compreso tra 0 e 6

Quindi abbiamo stabilità per $0<k<6$

d) Usiamo la formula $\quad 0 \leq T < \frac{m_\varphi}{\omega_t}$

dove $m_\varphi$ e $\omega_t$ si riferiscono alla funzione di trasferimento $8W(s)$

$|8W(j\omega)|=1$ Facendo i conti si ottiene $\omega_A=2$
Lo si poteva vedere da Nyquist che interseca
asse reale in $-\frac{1}{8}$ e quindi $8W(s)$ interseca
asse reale in $-1$. Quindi $m_\varphi=0$ e

$$T=0$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $|W(j)| = \sqrt{5}$ $\qquad |W(j)|^2 = 5$

$$\frac{1+a^2}{1} = 5 \qquad a = \pm 2 \qquad a = 2$$

2) $$T(s) = \frac{C(s)W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{k(s+a)}{s(s^2+s+1)+k(s+a)} \qquad G(s) = C(s)W(s)$$

$$S_a^G(s) = \frac{a}{G(s)}\,\frac{dG(s)}{da} = a\,\frac{\cancel{s(s^2+s+1)}}{k(s+a)}\,\frac{\cancel{k}}{\cancel{s(s^2+s+1)}} = \frac{a}{s+a}$$

$$S_a^T(s) = \frac{1}{1+G(s)}\,S_a^G(s) = \frac{s(s^2+s+1)}{s(s^2+s+1)+k(s+a)}\,\frac{a}{s+a} \qquad a = 2$$

3) Analisi di stabilità

$s^3+s^2+s+k(s+2)$

Stabilità $\qquad 0<k<1$

Tabella di Routh

| | |
|---|---|
| $1$ | $1+k$ |
| $1$ | $2k$ |
| $1-k$ | |
| $2k$ | |

$$T_{ee}(s) = \frac{1}{1+C(s)W(s)} = \frac{s(s^2+s+1)}{s(s^2+s+1)+k(s+2)}$$

$T_{re}(0) = 0 \Rightarrow e(t) = 0$ come effetto di solo $r(t)$.

$$T_{de}(s) = \frac{-W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{-s(s+2)}{s(s^2+s+1)+k(s+2)}$$

$$T_{de}(j) = \frac{-j(2+j)}{j(\cancel{-1}+j+\cancel{1})+k(2+j)} = \frac{1-2j}{(2k-1)+kj} = \frac{1}{-1+j(5k-2)}$$

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{(5k-2)^2+1}}\sin\left(t - \angle\left(-1+j(5k-2)\right)\right)$$

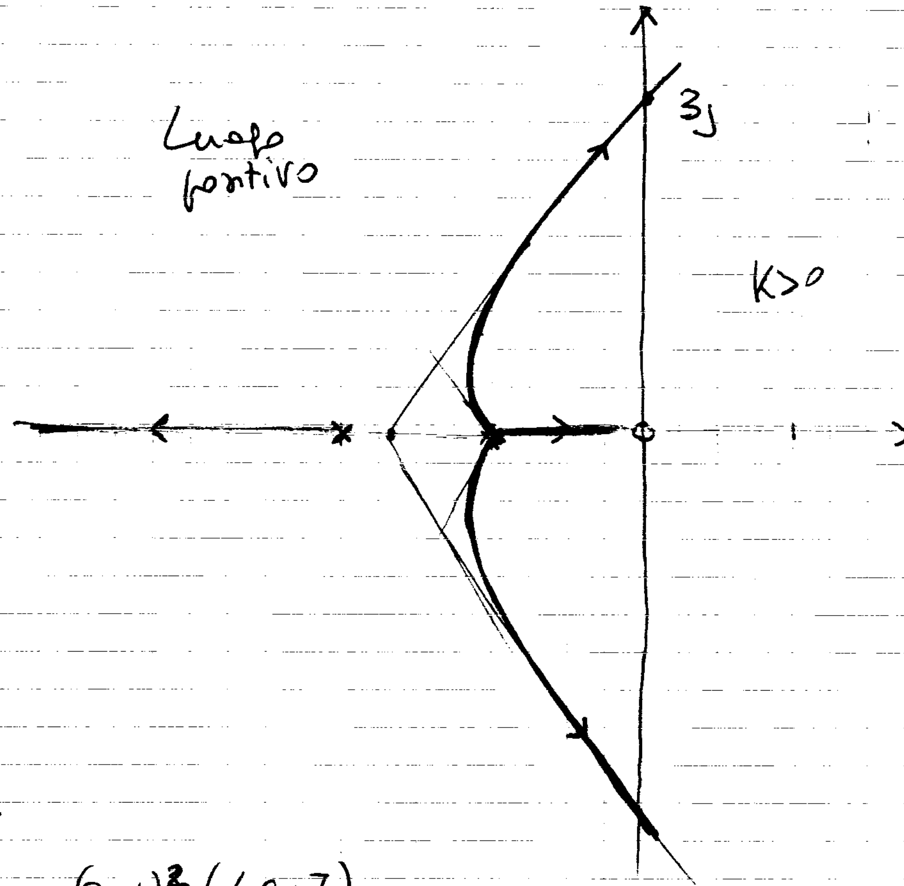
# Es. 3

Asintoti

$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = -\frac{5}{3}$

$\theta_a^+ = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$

$\theta_a^- = \pm 2\frac{\pi}{3}, 0$




Punti doppi

$$\begin{cases} (s+1)^3(s+2) + ks = 0 \\ 3(s+1)^2(s+2) + (s+1)^3 + k = 0 \end{cases}$$

$k = -(s+1)^2[3s+6+s+1] = -(s+1)^2(4s+7)$

$(s+1)^3(s+2) - s(s+1)^2(4s+7) = 0$

$(s+1)^2[s^2+3s+2-4s^2-7s] = 0$

$-3s^2-4s+2 = 0$

$3s^2+4s-2 = 0$

$s_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+6}}{3} \begin{cases} -1.72 & k = -0.06 \\ 0.39 & k = -16.5 \end{cases}$

Intersezione asse immaginario

$(s+1)^3(s+2) + ks =$

$= s^4 + 5s^3 + 9s^2 + (7+k)s + 2$

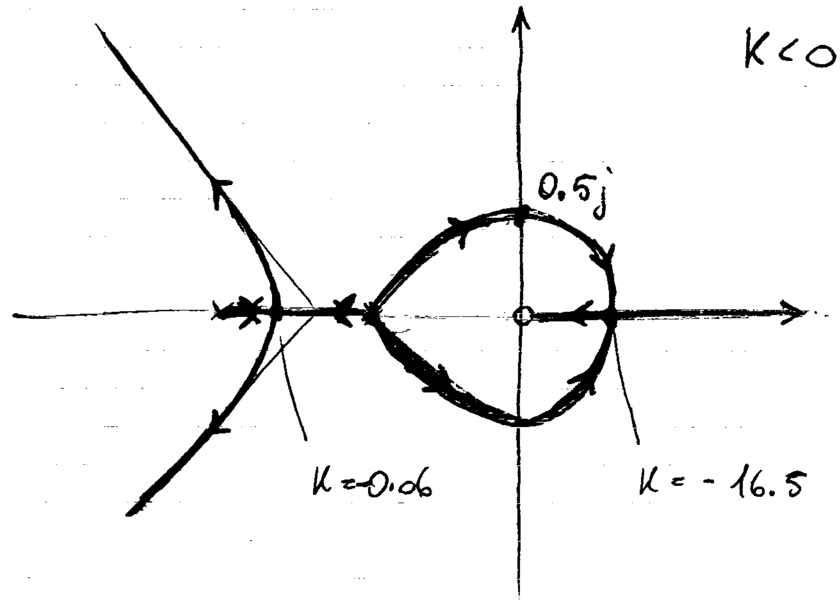
| | | |
|---|---|---|
| $1$ | $9$ | $2$ |
| $5$ | $7+k$ | |
| $\frac{38-k}{5}$ | $2$ | |
| $\frac{-k^2+31k+216}{38-k}$ | | |
| $2$ | | |

$\geq 0$ $\quad k_1 = 36.86 \rightarrow 0.228s^2+2=0 \quad s_{12} \simeq \pm j3$

$k_2 = -5.86 \rightarrow 8.772s^2+2=0 \quad s_{12} \simeq \pm j0.5$

Luogo negativo

K<0




3) I poli non sono mai tutti reali perché

$K>0$ 2 reali 2 complessi

$-0.06<K<0$ 2 reali 2 complessi

$-16.5<K<-0.06$ 4 complessi

$K\leq-16.5$ 2 reali 2 complessi

4) Basta calcolare per quale K il polinomio

$(s+1)^3(s+2)+Ks$ ha come zero il $s=-3$

$$(-3+1)^3(-3+2)+K(-3)=0$$

$$-8(-1)-3K=0 \qquad K=\frac{8}{3}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

Il sistema $G_p(s)$ non ha poli nell'origine $h_p = 0$
e lo guadagno di Bode unitario $G_p(0) = 1$

Vogliamo errore nullo al gradino $\Rightarrow h = 1$

$h_c = h - h_p = 1$

ed errore alla rampa $\varepsilon = \frac{1}{5}$

$$K_c = \frac{1}{G_p(0)} \frac{1}{\varepsilon} = 5$$

$$\hat{W}(s) = \frac{K_c G_p(s)}{s} = \frac{5}{s} G_p(s)$$

$$|\hat{W}(j5)| = \frac{5}{|j5|} |G_p(j5)| = 0.5 \qquad |G_p(j5)|_{db} = -6\ db = 0.5$$

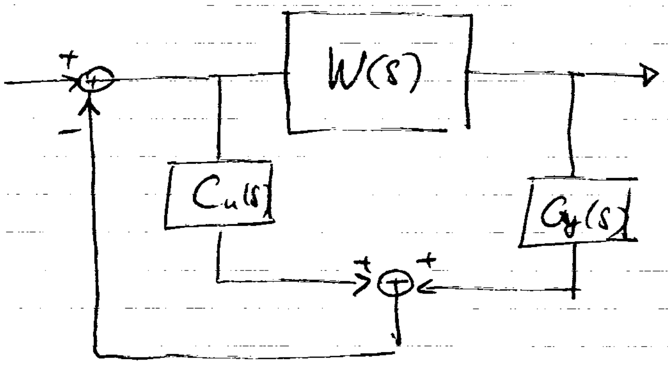
$$\angle \hat{W}(j5) = -90^\circ + \angle G_p(j5) = -150^\circ \qquad m_\varphi^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^\circ = 45 - 30 = 15^\circ \\ C = \dfrac{1}{|\hat{W}(j5)|} = 2 \end{array}\right\} \text{Rete anticipatrice}$$

ES. 5

$\Delta(s) = s+2$

$$W(s) = \frac{1}{s^2+1} = \frac{b(s)}{a(s)}$$




$$C_u(s) = \frac{n_u(s)}{s+2}$$

$$C_y(s) = \frac{n_y(s)}{s+2}$$

$$T(s) = \frac{W(s)}{1 + C_u(s) + C_y(s) W(s)} = \frac{\Delta(s)\, b(s)}{\Delta(s) a(s) + n_u(s)\, a(s) + n_y(s)\, b(s)} = \frac{\cancel{\Delta(s)} b(s)}{\cancel{\Delta(s)} d(s)}$$

$$n_u(s) a(s) + n_y(s) b(s) = (s+2)\left[d(s) - a(s)\right] = (s+2)(\cancel{s^2} + 2s + 2 - \cancel{s^2} - 1)$$

$$d(s) = (s+1-j)(s+1+j) = (s+1)^2 + 1 = s^2 + 2s + 2 \quad \Big| \quad \overset{\shortparallel}{2s^2 + 5s + 2}$$

$$n_y(s) = x_1 s + x_0$$

$$n_u(s) = y_1 s + y_0$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 0$
$y_0 = 2$
$x_1 = 5$
$x_0 = 0$

$$C_u(s) = \frac{5s}{s+2}$$

$$C_y(s) = \frac{2}{s+2}$$