Corso di laurea in Ingegneria INFORMATICA
Compito di Controlli Automatici I
19 Settembre 2001

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e di ogni calcolo fornire una traccia.

Esercizio 1–[punti 7]

Si consideri il sistema a catena chiusa con retroazione unitaria avente funzione di trasferimento a catena diretta

$$W(s) = K\frac{s-2}{s^3(s+1)}.$$

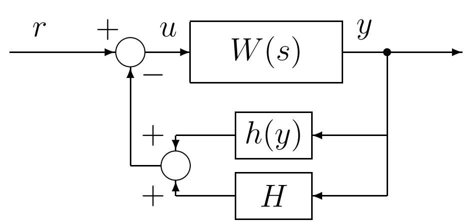
a. Si tracci il luogo dei poli in catena chiusa al variare del guadagno $K > 0$, determinando i punti doppi, il campo di stabilità e i punti nei quali il luogo incontra l'asse immaginario.

b. Si tracci il luogo dei poli in catena chiusa al variare del guadagno $K < 0$.

c. Per quali valori di K il sistema ha risposta impulsiva senza modi oscillatori?

Esercizio 2–[punti 8]

Si consideri il sistema retroazionato



$$W(s) = \frac{1}{s(s^2+s+4)}.$$

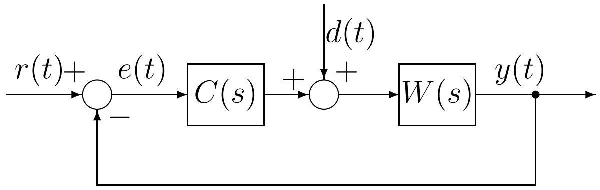
a. Si tracci il diagramma di Bode e di Nyquist di $W(s)$ determinando intersezioni con gli asse reale e immaginario e gli eventuali asintoti.

b. Si supponga che $h(y) = Ky$ (funzione lineare), $K \in \mathbb{R}$. Utilizzando il criterio di Nyquist, dire per quali valori di K e H il sistema in catena chiusa e' stabile.

c. Si supponga che $K = 1$ e $h(y)$ sia una funzione qualsiasi nonlineare tale che $h(0) = 0$ e $0 < h(y)/y < 1$. Utilizzando il corollario del criterio del cerchio, determinare se il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile.

Esercizio 3–[punti 7]

Si consideri il sistema



dove

$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad W(s) = \frac{s^2+b}{s^2+a}.$$

a. Si supponga inizialmente che $K = 0$. Si determinino i parametri a e b sapendo che a un disturbo impulsivo $d(t) = \delta(t)$ il sistema risponde con un'uscita $y(t)$ che a regime vale $-\frac{3}{2}\sin(2t)$.

b. Si supponga ora che $K \neq 0$ e che (a e b siano quelli calcolati al punto precedente (se il punto presedente non viene completato porre $a = 9$ e $b = 1$). Supponendo che $r(t) = 2t$ e che $d(t) = \cos(2t)$, determinare l'andamento a regime che assume l'errore $e(t)$ a transitorio esaurito in funzione di K.

c. Supponiamo che $d(t) = A\cos(\omega t)$. Per quali valori di K, a, b, ω si ha reizione totale del disturbo sull'uscita y (cioe' il disturbo non influisce sulla uscita).

Esercizio 4–[punti 5]

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}.$$

Disegnare lo schema a blocchi del compensatore a due parametri (retroazione doppia dall'ingresso u e dall'uscita y) e determinare la funzione di trasferimento a catena chiusa. Determinare un compensatore a due parametri tale che

a. i compensatori $C_u(s)$ e $C_y(s)$ abbiano poli in -2;

b. la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa abbia modi $e^{-t}\cos t$;

c. nel sistema a catena chiusa l'errore a regime in risposta al gradino sia nullo.

Esercizio 5–[punti 3]

a. Si consideri un sistema con risposta impulsiva

$$w(t) = \begin{cases} (t+1)^n & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ (intero positivo nullo o negativo). Discutere la stabilità BIBO del sistema al variare dell'intero n.

b. Si determini la stabilità BIBO e la stabilità rispetto alle condizioni iniziali del sistema

$$y''(t) + (a+1)y'(t) + ay(t) = u'(t) - 2u(t)$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

ES. 1

a,b) $S^3(S+1)+K(S-2)=0$

$S^4+S^3+KS-2K$

<u>Asintoti</u> : 3 asintoti $n=4, m=1$

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{3} = \frac{-1-2}{3} = -1$$

<u>Punti doppi</u>

$$\begin{cases} S^3(S+1)+K(S-2)=0 \\ 3S^2(S+1)+S^3+K=0 \end{cases}$$

$K=-S^2(3S+3+S)$

$S^3(S+1)-S^2(4S+3)(S-2)=0$

$S^2(S^2+S-4S^2+8S-3S+6)=0$

$+3S^2-6S-6=0$

$S^2-2S-2=0$

$S_{12}=1\pm\sqrt{3}$ $\begin{cases} 2.73 \\ -0.73 \end{cases}$

$K_1=-104$

$K_2=-0.4$

<u>Tabella di Routh</u>

1	0	$-2K$
1	K	
$-K$	$-2K$	
$K-2$		
$-2K$		

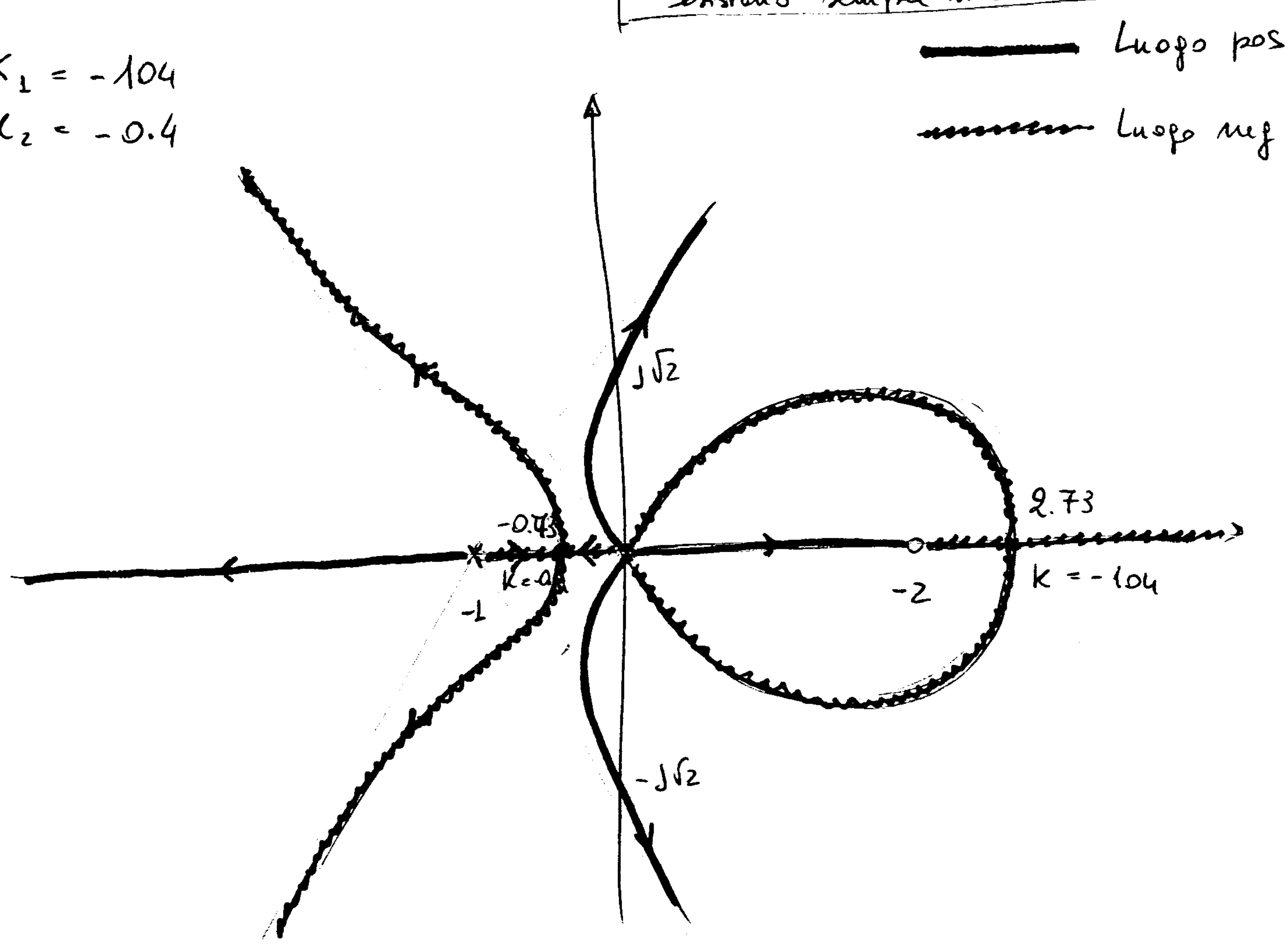
Stabile per $K>2$ e $K<0 \Rightarrow$ mai

Intersezione asse immaginario

$K=0$ $S^3=0 \Rightarrow S=0$

$K=+2$ $-2S^2-4=0$ $S_{12}=\pm j\sqrt{2}$

c) Dai valori di K_1, K_2 dove si hanno i punti doppi e dal luogo si deduce che non si hanno K che portano a punti del luogo che sono tutti reali. Quindi esistono sempre modi oscillatori.



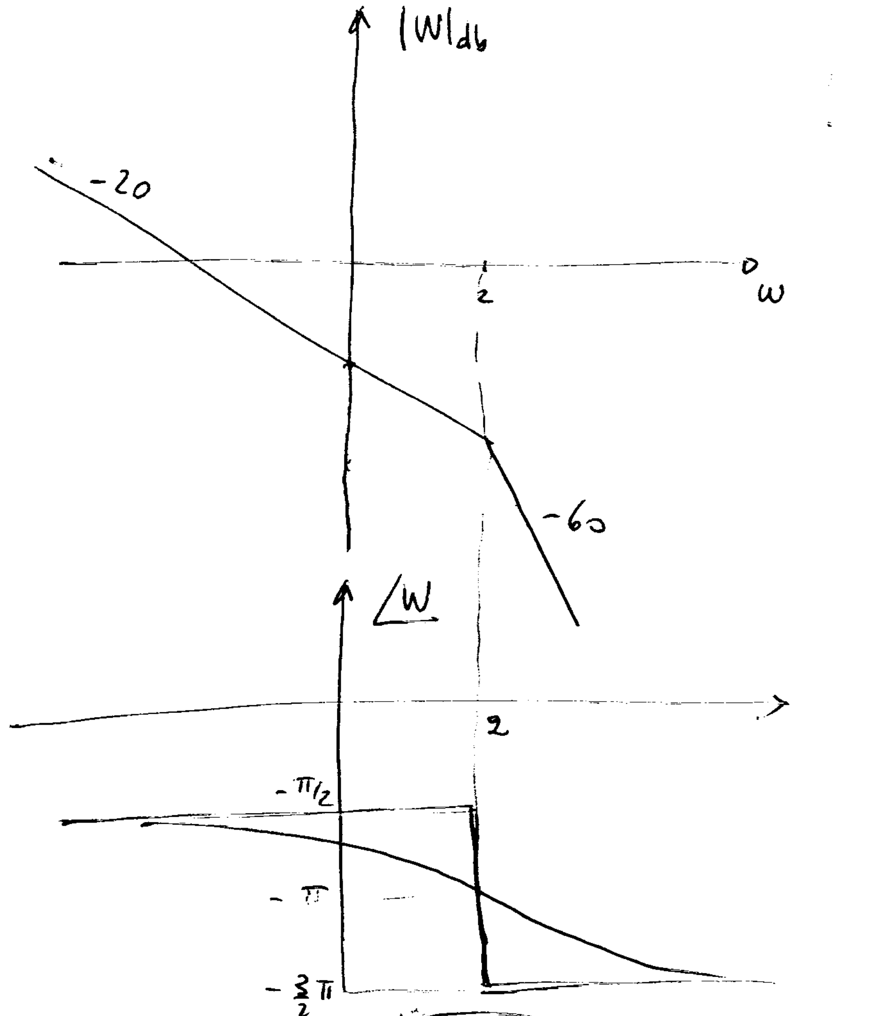
ES. 2

a)

$$W(s) = \frac{1}{s(s^2+s+4)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{s\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)}$$

$\omega_n = 2 \qquad \xi = \frac{1}{4}$

$|K_{Bode}|_{db} = \left|\frac{1}{4}\right|_{db} = -12$



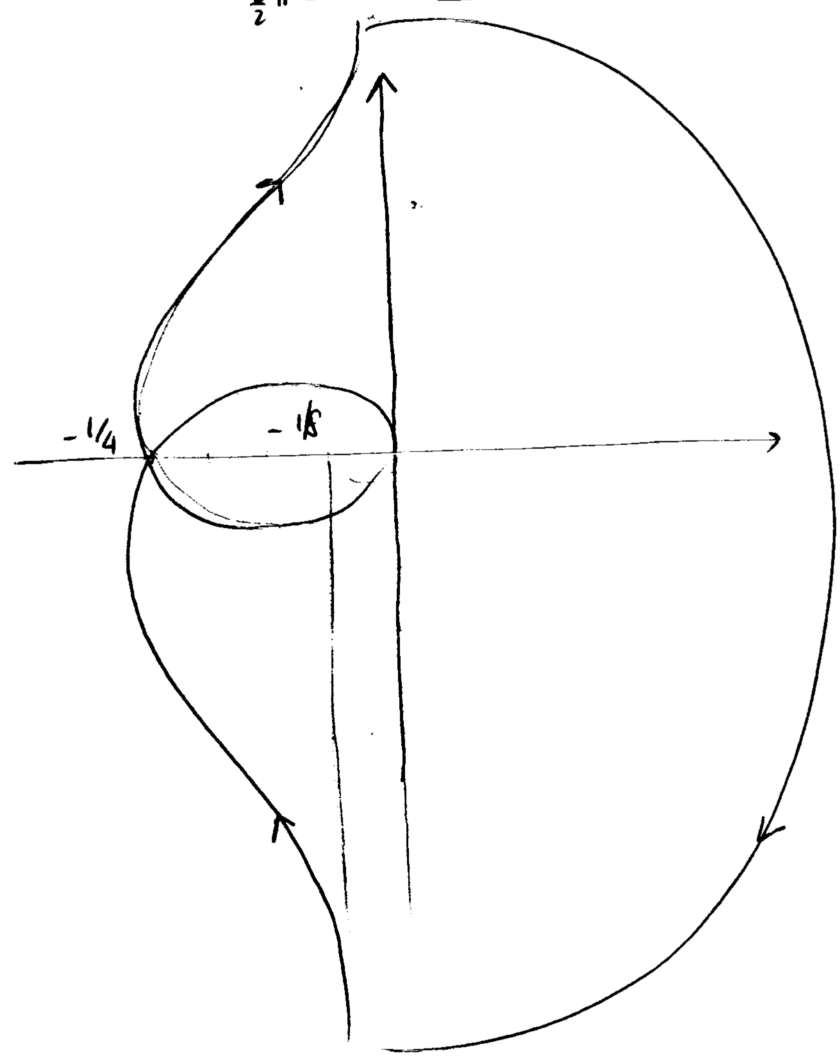
$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega(4-\omega^2+j\omega)} = \frac{(4-\omega^2)-j\omega}{j\omega\left[(4-\omega^2)^2+\omega^2\right]}$$

$$Re = -\frac{1}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}$$

$$Im = -\frac{4-\omega^2}{\omega\left[(4-\omega^2)^2+\omega^2\right]}$$

$\omega = 2 \qquad Im = 0, \quad Re = -\frac{1}{4}$

$\omega = 0^+ \qquad Re = -\frac{1}{16}$ Asintoto, $\quad Im = -\infty$



$\omega^2 = x \qquad Re = f(x) = -\frac{1}{(4-x)^2+x}$

$\min f(x) = -\frac{1}{\min (4-x)^2+x}$

$-2(4-x)+1=0 \qquad x = \frac{7}{2}$

$\min f(x) = -\frac{4}{15} = -0.2\dot{6}$

b) Se $h(y)=Ky$, allora in retroazione abbiamo una funzione lineare statica

$$Hy+Ky=(H+K)y$$

Si può usare Nyquist. $P=0$ $\quad Z=P-N=-N$

$-\frac{1}{H+K}<-\frac{1}{4} \Rightarrow N=0 \Rightarrow Z=0 \quad (0<H+K<4)$

$-\frac{1}{4}<-\frac{1}{H+K}<0 \Rightarrow N=-2 \Rightarrow Z=2 \quad (H+K>4)$

$-\frac{1}{H+K}>0 \Rightarrow N=-1 \Rightarrow Z=1 \quad (H+K<0)$

c) In questo caso in retroazione abbiamo una nonlinearità $\tilde{h}(y)$ che è compresa tra le rette di pendenza 1 e 2 cioè

$\tilde{h}(y)=h(y)+$ [illegible] $y \Rightarrow 1<\frac{\tilde{h}(y)}{y}<2$

Per utilizzare il criterio del Cerchio dobbiamo verificare che

$$F(s)=\frac{W(s)+2}{W(s)+1}=\frac{s^3+s^2+4s+2}{s^3+s^2+4s+1}$$

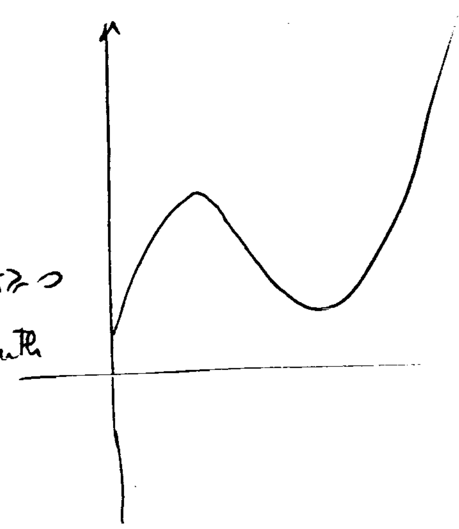
$F(s)$ è Positivo reale $\Leftrightarrow$ 1) $\mathrm{Re}\,F(j\omega)\geq 0$
2) num + den è stabile

1) $\mathrm{Re}\,F(j\omega)=\frac{(2-\omega^2)(1-\omega^2)+\omega^2(4-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+\omega^2(4-\omega^2)^2}=(\omega^2=x)=\frac{x^3-7x^2+13x+2}{----}>0$

Per verificare che $\mathrm{Re}\,F(j\omega)\geq 0$ basta verificare se $\overset{f(x)}{=} x^3-7x^2+13x+2\geq 0$ per $x\geq 0$

$f'(x)=3x^2-14x+13 \qquad x_{12}=3.4$ e 1.3

$f(x_2)=4.58\geq 0 \qquad f(0)\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq 0$ per $x\geq 0$



2) num + den $=2s^3+2s^2+8s+3$

che mostra la stabilità

Tabella di Routh

2	8
2	3
5	
3	

$\boxed{\text{ES3}}$

a) Se $d(t) = \delta(t)$ allora $y(t)$ è la risposta impulsiva del sistema con f. di trasferimento $W(s) = \frac{s^2+b}{s^2+a}$. Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+b}{s^2+a}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+a-a+b}{s^2+a}\right] = \mathcal{L}^{-1}[1] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b-a}{s^2+a}\right] =$$

$$= \delta(t) + \frac{b-a}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}\, t)$$

quindi $\begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ \frac{b-a}{\sqrt{a}} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$

b) Calcoliamo

$$T_{re}(s) = \frac{1}{1+CW} = \frac{s(s^2+4)}{s(s^2+4)+k(s^2+1)}$$

$$T_{de}(s) = \frac{-W}{1+CW} = \frac{-s(s^2+1)}{s(s^2+4)+k(s^2+1)}$$

Stabilità: tabella di Routh di s^3+ks^2+4s+k

1	4
k	k
3	
k	

stabilità per $\underline{k > 0}$

Usiamo la sovrapposizione degli effetti

1) $d(t)=0$ $r(t)=2t$ $\Rightarrow$ $e(t) \simeq \frac{8}{k}$ asintoticamente (usando teorema valore finale)

2) $d(t) = \cos(2t)$ $r(t)=0$ $\Rightarrow$ $e(t) = |T_{de}(2j)| \cos(2t + \angle T_{de}(2j))$

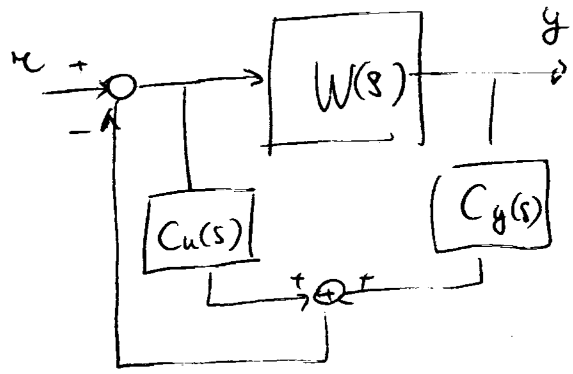
$$T_{de}(2j) = \frac{-2j(-3)}{2j\cdot 0 + k(-3)} = -j\,\frac{2}{k}$$

Quindi $e(t) \simeq \frac{8}{k} + \frac{2}{k}\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$

c) Si ha reiezione totale $\Leftrightarrow T_{de}(j\omega) = \frac{j\omega(b-\omega^2)}{j\omega(a-\omega^2)+k(b-\omega^2)} = 0$

$\Leftrightarrow \omega = 0$ oppure $\omega = \sqrt{b}$

$\boxed{\text{Es 4}}$ $\quad W(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{b(s)}{a(s)}$



$$T(s) = \frac{W}{1 + C_u + W C_y} = \frac{b(s)}{d(s)}$$

a) $C_u(s) = \frac{N_u(s)}{\Delta(s)} \qquad \Delta(s) = s+2$

$C_y(s) = \frac{N_y(s)}{\Delta(s)} \qquad \Delta(s) = s+2$

b) $T(s) = \frac{b(s)}{d(s)} \qquad d(s) = \alpha(s^2 + 2s + 2)$

Avere modi $e^{-t}\cos t$ e $e^{-t}\sin t$ implica che $d(s)$ ha zeri $-1 \pm j$ e quindi

$$d(s) = \alpha(s+1-j)(s+1-j) = \alpha(s^2 + 2s + 2)$$

c) $T(0) = \frac{b(0)}{d(0)} = 1 \Rightarrow 2\alpha = b(0) = 2 \Rightarrow \alpha = 1$

Si deve risolvere l'equazione diofantea

$$\Delta(s)(d(s) - a(s)) = N_u(s)\,a(s) + N_y(s)\,b(s)$$

$$(s+2)(\cancel{s^2} + 2s + 2 - \cancel{s^2} - s) = (s+2)(s+2) = s^2 + 4s + 4$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \hline y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_y(s) = \frac{s+2}{s+2} = 1$$

$$N_u(s) = 0$$

$\boxed{\text{ES 5}}$

(a) Il sistema è BIBO stabile se e solo se $W(t)$ è L^1 (assolutamente sommabile) cioè

$$\int_0^\infty |w(t)|\, d\tau < \infty$$

Nel nostro caso $W(t)$ è sommabile solo se $n \leq -2$

(b) $a(s) = s^2 + (a+1)s + a = (s+1)(s+a)$

$b(s) = s - 2$

Il sistema è as. stabile rispetto alle condizioni iniziali se e solo se $a(s)$ ha zeri con $Re < 0$

as stabile $\Leftrightarrow$ $a > 0$

semp. stabile $\Leftrightarrow$ $a = 0$ (zeri semplici con parte reale nulla)

instabile $\Leftrightarrow$ $a < 0$

$$W(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+a)}$$

Se $a \neq -2$ BIBO $\Leftrightarrow$ $a > 0$

Se $a = -2$ allora $W(s) = \frac{1}{s+1}$ che è BIBO