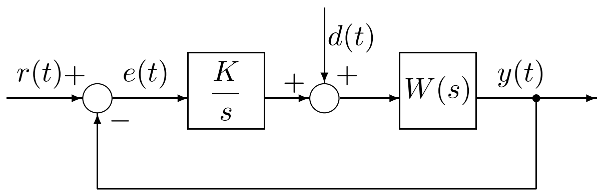
Prova Scritta di Controlli Automatici del 2.7.2001
Prof. Zampieri

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: ______________

Non è ammessa la consultazione di libri, dispense, quaderni. Non si può usare la calcolatrice programmabile. Ogni risposta va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio-1 [7 pt]

Si consideri lo schema



dove

$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad W(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{s^2 + a}$$

e $K \geq 0$.

1. Si supponga inizialmente che il controllo sia spento (cioe' $K = 0$). Calcolare il valore di a sapendo che in corrispondenza ad un disturbo impulsivo $d(t) = \delta(t)$ si ha un'uscita a regime $y(t)$ sinusoidale di pulsazione $\omega = 2$, cioè $y(t) \simeq A \sin(2t + \phi)$, per qualche $A, \phi \in \mathbb{R}$.

2. Supponiamo ora che a abbia il valore calcolato sopra e che $r(t) = t$, $d(t) = \cos(2t)$. Supponiamo inoltre di accendere il controllo ($K \neq 0$). Calcolare l'andamento asintotico di $y(t)$ in funzione di K. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali l'andamento asintotico di $y(t)$ è compreso tra ± 10.

Esercizio-2 [6 pt]

Si consideri lo schema precedente dove

$$C(s) = K, \qquad W(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)^3}.$$

Tracciate il luogo dei poli della funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di $K \geq 0$ calcolando eventuali asintoti, punti doppi e determinando gli angoli di uscita dai poli e zeri.

Esercizio-3 [6pt]

Si consideri lo schema precedente dove

$$C(s) = K, \qquad W(s) = \frac{s - 4}{s^2(s+1)}$$

1. Tracciate il diagramma di Bode di $W(s)$.

2. Tracciate il diagramma di Nyquist di $W(s)$ determinando eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario.

3. Impiegando il criterio di Nyquist, determinare la stabilità del sistema a catena chiusa al variare di K.

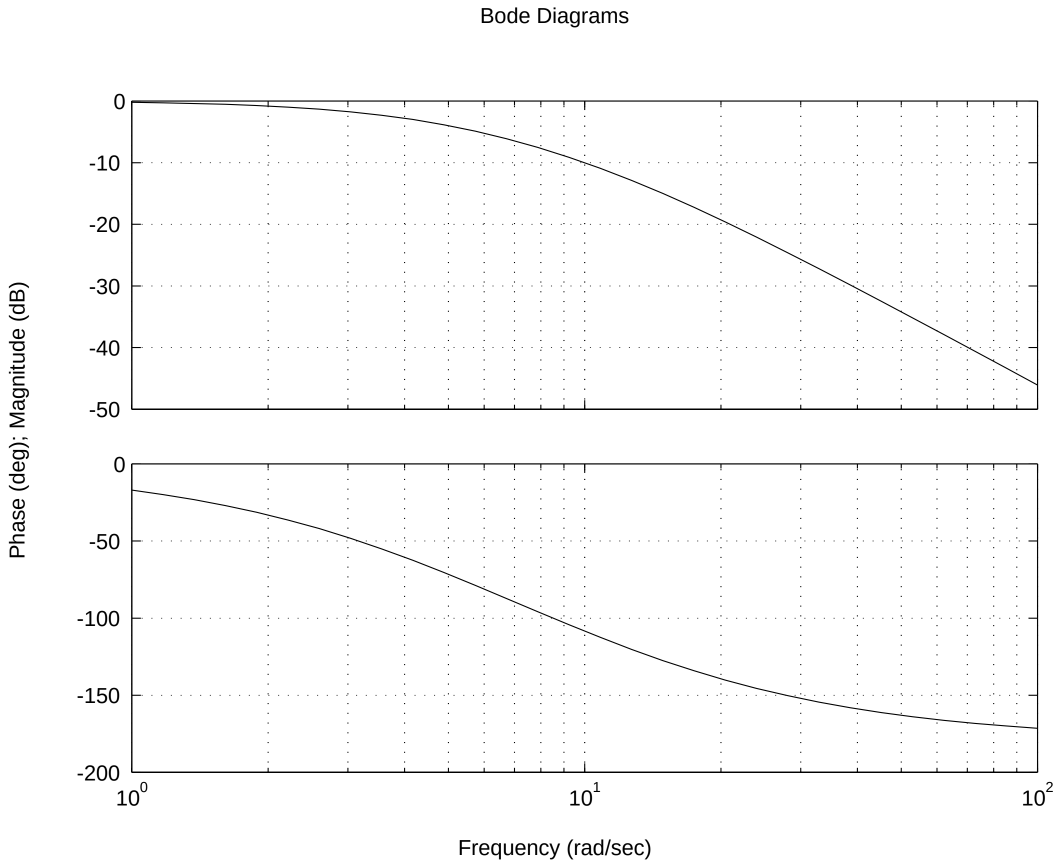


Figure 1: Diagramma di Bode.

Esercizio-4 [5 pt]

Si consideri un sistema BIBO stabile avente diagramma di Bode mostrato in figura.

Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

a. errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,01$;

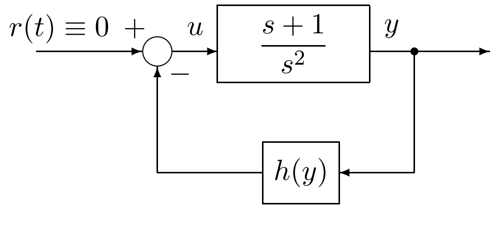
b. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 3$ rad/s;

c. margine di fase $m_\varphi = 10^o$.

Si richiede di determinare il tipo di rete compensatrice (ritardatrice, anticipatrice, a sella) riportandone la funzione di trasferimento senza calcolarne esplicitamente i parametri.

Esercizio-5 [6 pt]

Si consideri il seguente schema

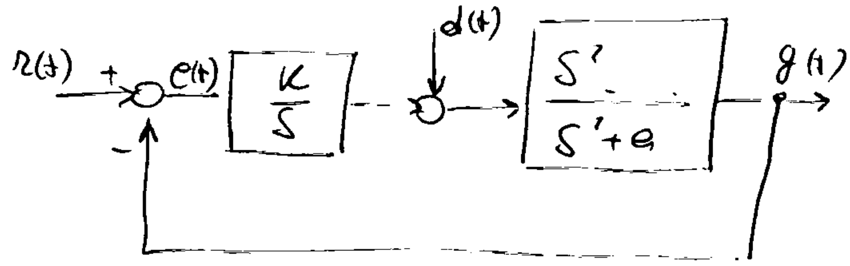


in cui

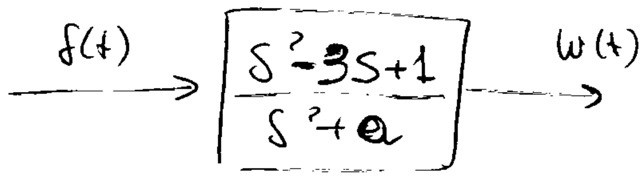
$$h(y) = 2y + 2\text{sat}(y)$$

dove $\text{sat}(x) = x$ se $-1 \leq x \leq 1$, $\text{sat}(x) = 1$ se $x \geq 1$ e $\text{sat}(x) = -1$ se $x \leq -1$. Usando la versione analitica del criterio del cerchio, verificare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali.

ES 1



1)



Se $d(t) = \delta(t)$, l'uscita è esattamente la risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ e quindi

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\right]$$

Si noti che $w(t)$ contiene un modo sinusoidale di pulsazione $\omega = \sqrt{a}$ e quindi $a = 2$

2) Analisi di stabilità:

Il denominatore del sistema in catena chiusa è

$$s(s^2+4) + k(s^2-3s+1) = s^3 + ks^2 + (4-3k)s + k$$

Tabella di Routh

1	4-3k
k	k
3-3k	
k	

$0 < k < 1$

Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

$r(t) = t$
$d(t) = 0$

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{k(s^2 - 3s + 1)}{s(s^2+4) + k(s^2 - 3s + 1)}$$

$$Y(s) = T_{ry}(s)\frac{1}{s^2}$$ Teorema valore finale

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = \lim_{s\to 0^+} s^2 Y(s) = T_{ry}(0) = 1 \Rightarrow y(t) \simeq t$$

$r(t) = 0$
$d(t) = \cos 2t$

$$T_{de}(s) = \frac{W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{s(s^2-3s+1)}{s(s^2+4)+k(s^2-3s+1)}$$

$$T_{dy}(2j) = \frac{2j\,\cancel{(-4-6j+1)}}{0 + k\,\cancel{(-4-6j+1)}} = \frac{2j}{k} \qquad k \geq 0$$

$$y(t) \simeq |T_{dy}(2j)| \cos(2t + \angle T_{dy}(2j)) = \frac{2}{k}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Complessivamente

$$y(t) \simeq t + \frac{2}{k}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$

che è un segnale illimitato per $\forall k$ e quindi non sarà mai compreso tra ± 10.

Es 2

$$T(s) = \frac{C(s)W(s)}{1 + C(s)W(s)} = \frac{k(s^2+3s+1)}{(s+1)^3 + k(s^2+3s+1)}$$

1) $p(s) + k\,q(s) = (s+1)^3 + k(s^2+3s+1)$ $\qquad s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -2.6 \\ -0.4 \end{cases}$

Asintoti: esiste un asintoto lungo l'asse reale.

punti doppi:

$$\begin{cases} (s+1)^3 + k(s^2+3s+1) = 0 \\ 3(s+1)^2 + k(2s+3) = 0 \end{cases} \qquad k = -\frac{3(s+1)^2}{2s+3}$$

$$(s+1)^3 - \frac{3(s+1)^2}{2s+3}(s^2+3s+1) = 0$$

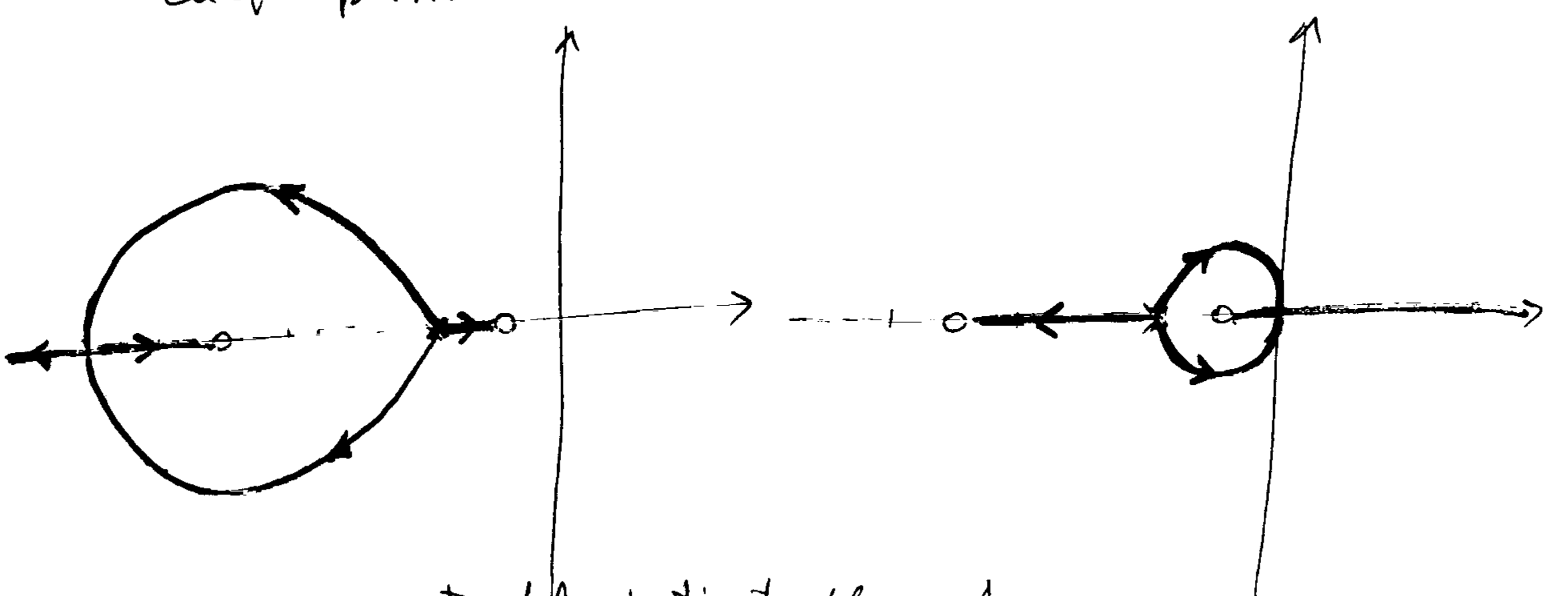
$$(s+1)^2\left[(s+1)(2s+3) - 3(s^2+3s+1)\right] = (s+1)^2\left[2s^2+5s+3-3s^2-9s-3\right]$$

$$= (s+1)^2\left[-s^2-4s\right]$$

punti doppi in 0 e -4

punto triplo in -1

Luogo positivo $\qquad$ Luogo negativo

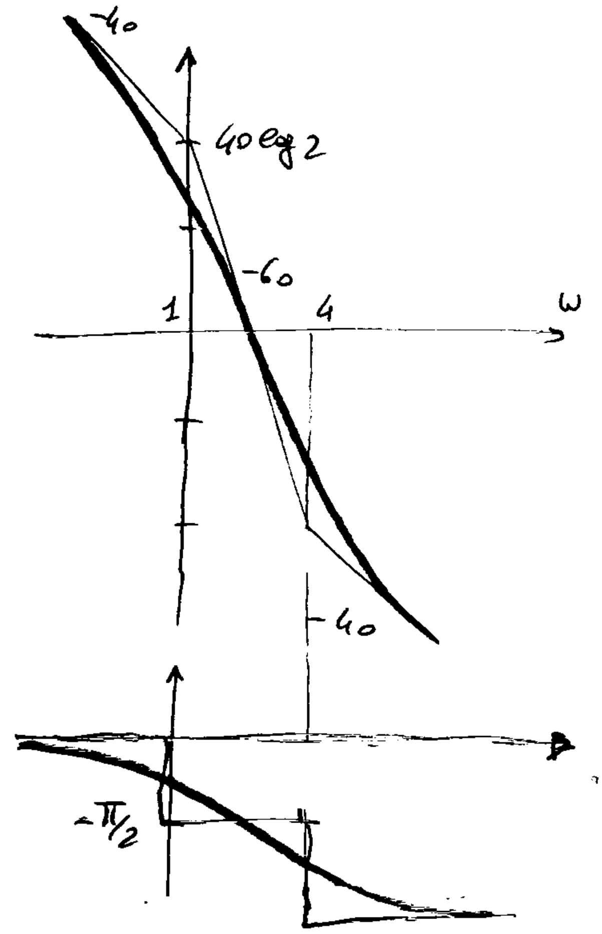


Angoli di uscita dal punto triplo -1.

Luogo positivo: $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ Luogo negativo: $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

Es 3

1) $W(s) = \dfrac{s-4}{s^2(s+1)} = -4\,\dfrac{(1-s/4)}{s^2(1+s)}$



$T_1 = 1$

$T_2 = 1/4$

Guadagno di Bode $K_B = -4$

$|K|_{db} = 20\log 4 = 40 \log 2$

Retta 1

$y = -40x + 20\log 4$

Retta 2

$y = -60x + 20 \log 4$

Retta 3

$x = \log 4$ la retta precedente dà $y = -40 \log 4$

Quindi la retta è

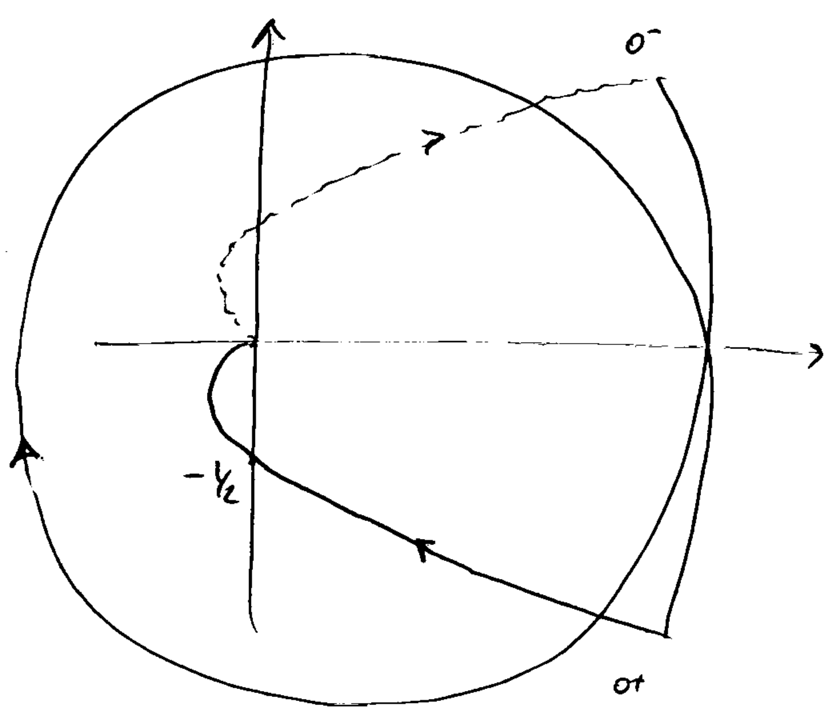
$y = -40x - 40 \log 4$

2) $W(j\omega) = \dfrac{-4+j\omega}{-\omega^2(1+j\omega)} =$

$= \dfrac{(-4+\omega^2)+j\omega(+5)}{-\omega^2(1+\omega^2)}$

$Re = \dfrac{4-\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)}$

$Im = \dfrac{-5}{\omega(1+\omega^2)}$



$\omega \simeq 0$ $\quad Re \simeq \dfrac{4}{\omega^2}$ $\quad Im \simeq \dfrac{-5}{\omega}$ $\Rightarrow$ andamento parabolico

intersezione con gli assi reale e l'immaginario

$\omega = 2$ $\quad Re = 0$ $\quad Im = -\dfrac{1}{2}$

3) Dallo schema all'∞ si vede che il numero di giri $N \neq 0$ per ogni K.
Poiché $P = 0$ (numero poli instabili) si ottiene che $Z \neq 0$ (numero zeri instabili)
Quindi il sistema è sempre instabile

$\boxed{\text{ES 4}}$

Dal diagramma di Bode si deduce che

$G_p(0) = 1 \qquad |G_p(3j)|_{db} \approx -2\,db \qquad \angle G_p(3j) = -50°$

$h = 1 \quad h_p = 0 \quad \Rightarrow h_c = h - h_p = 1$

$K_c = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{G_p(0)} = 100$

$G_c(s)\,G_p(s) = \underbrace{\frac{K_c}{s}\,G_p(s)}_{\hat{W}(s)}\,G_a(s)$

$|\hat{W}(j3)| = \frac{K_c}{|j3|}\,\underbrace{|G_p(3j)|}_{0.8} = \frac{100}{3}\,0.8 = 26 \qquad C = \frac{1}{26} < 1$

$\angle \hat{W}(j3) = -90° - 50° = -140° \qquad m_\varphi^\circ = 180 + \angle \hat{W}(3j) = 40°$

$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^\circ = 10 - 40 = -30$

Serve una rete attenuatrice

$\boxed{\text{Es. 5}}$

$$\frac{h(y)}{y} = 2 + 2\,\frac{sat(y)}{y}$$

$$0 < \frac{sat(y)}{y} \leq 1 \qquad \forall y \neq 0$$

Quindi

$$2 < \frac{h(y)}{y} \leq 4 \qquad \forall y \neq 0$$

Possiamo porre $k_1 = 2$ e $k_2 > 4$ $\Rightarrow 2 < \frac{h(y)}{y} < k_2 \quad y \neq 0$

Applicando il criterio del cerchio, dobbiamo verificare se $F(s) = \frac{1 + k_2 W(s)}{1 + k_1 W(s)}$ è PR

$$F(s) = \frac{s^2 + k_2 s + k_2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\mathrm{Re}\, F(j\omega) = \mathrm{Re}\, \frac{(k_2 - \omega^2) + k_2 j\omega}{(2-\omega^2) + 2j\omega} = \frac{(k_2-\omega^2)(2-\omega^2) + 2k_2\omega^2}{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$$= \frac{\omega^4 + (k_2 - 2)\omega^2 + 2k_2}{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

Per ogni $k_2 > 4$ si vede che $\mathrm{Re}\, F(j\omega) \geq 0$

$F(s)$ non ha poli instabili né con parte reale nulla

Quindi $F(s)$ è positiva reale e il sistema asintoticamente stabile