Corso di laurea in Ingegneria Informatica

Insegnamento di CONTROLLI AUTOMATICI (a.a. 2001-2002)

1ª prova di accertamento - 4 maggio 2002

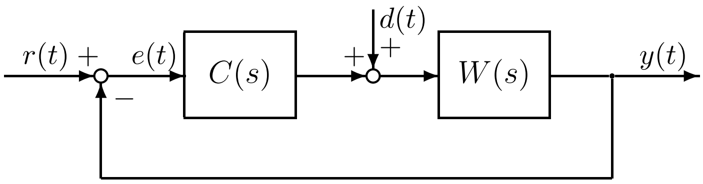
Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

1. **[3 pt]** Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K}{s^2 + as + b}.$$

Determinare i parametri K, a e b sapendo che la risposta impulsiva del sistema contiene i modi e^{-t} e te^{-t} e sapendo che il sistema risponde a un gradino unitario con un'uscita che a regime è uguale a 10. Qual'è il grado relativo e il tipo del sistema così ottenuto?



2. **[6 pt]** Si consideri il sistema di controllo mostrato nella figura in cui

$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 9}.$$

Supponiamo che $r(t) = t$ e che $d(t) = \cos(3t)$. Determinare l'andamento dell'errore $e(t)$ a regime in funzione di K.

3. **[9 pt]** Si consideri il sistema di controllo mostrato nella figura in cui

$$C(s) = \frac{K}{s^2}, \qquad W(s) = \frac{s+1}{s+10}.$$

a. Si tracci il luogo dei poli in catena chiusa al variare del guadagno $K > 0$, calcolando gli eventuali asintoti, punti multipli.

4. **[9 pt]** Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+1}{s(s-4)}.$$

a. Si tracci il diagramma di Bode.

b. Si tracci il diagramma di Nyquist (si calcolino gli eventuali asintoti e le intersezioni con gli assi).

5. **[3 pt]** Si consideri un blocco ritardatore descritto dalla relazione ingresso/uscita

$$y(t) = u(t-1).$$

Determinare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento. Dire, giustificando la risposta, se questo sistema è BIBO stabile.

ES 1

I modi e^{-t}, te^{-t} indicano la presenza di un polo doppio in -1. Quindi

$$W(s) = \frac{k}{s^2+as+b} = \frac{k}{(s+1)^2} \longrightarrow a=2,\ b=1$$

Inoltre poiché il guadagno unitario è amplificato di 10
Abbiamo che $W(0)=k=10$. Quindi

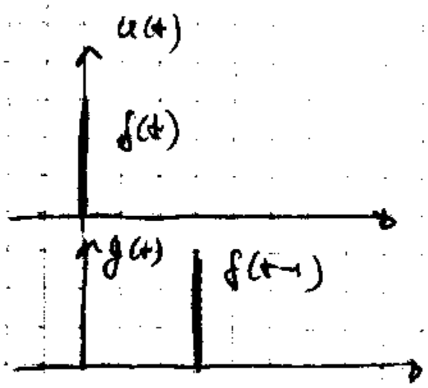
$$W(s) = \frac{10}{s^2+2s+1}$$

Il tipo coincide con la molteplicità del polo nell'origine che è 0.

Il grado relativo è la differenza tra grado denominatore $(=2)$ e grado numeratore $(=0)$ e quindi vale 2.

ES 5

$y(t) = u(t-1)$



Risposta impulsiva

$W(t) = \delta(t-1)$

Funzione di trasferimento

$$W(s) = \int_0^{\infty} \delta(t-1)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} \delta(t-1)\, e^{-s}\, dt = e^{-s} \int_0^{\infty} \delta(t-1)\, dt = e^{-s}$$

Il sistema è BIBO stabile dato che se $u(t)$ è limitato anche la sua versione ritardata è limitata.

$\boxed{\text{ES. 2}}$ Calcoliamo le funzioni di trasferimento

$$T_{re}(s) = \frac{1}{1+C(s)W(s)} = \frac{s(s^2+3s+9)}{s(s^2+3s+9)+k}$$

$$T_{de}(s) = \frac{-W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{-s}{s(s^2+3s+9)+k}$$

Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

1) $r(t)=t$, $d(t)=0$

$$E(s) = T_{re}(s)\frac{1}{s^2} = \frac{s^2+3s+9}{s(s^2+3s+9)+k}\,\frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} E(s)s = \frac{9}{k}$$

Stabilità

s^3+3s^2+9s+k

1	9
3	k
$\frac{27-k}{3}$	
k	

Stabilità $0<k<27$

2) $r(t)=0$, $d(t)=\cos 3t$

$$e(t) \simeq |T_{de}(3j)| \cos\left(3t + \angle T_{de}(3j)\right)$$

$$T_{de}(3j) = \frac{-3j}{3j(\cancel{-9}+9j\cancel{+9})+k} = \frac{-3j}{\underbrace{-27+k}_{\text{negativo}}}$$

$$|T_{de}(3j)| = \frac{3}{|k-27|} = \frac{3}{-k+27}$$

$$\angle T_{de}(3j) = \frac{\pi}{2}$$

$e(t)$ globale ~~vale~~ asintotico vale

$$e(t) \cong \frac{9}{k} + \frac{3}{-k+27}\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Es 3

Si tratta di tracciare il luogo delle radici di

$$s^2(s+10)+k(s+1)=0$$

__Asintoti__ $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{2} = \frac{-10+1}{2} = -\frac{9}{2}$

angoli $\pm\frac{\pi}{2}$

__Punti doppi__

$$\begin{cases} s^2(s+10)+k(s+1)=0 \\ 2s(s+10)+s^2+k=0 \end{cases}$$

$k = -s(3s+20)$

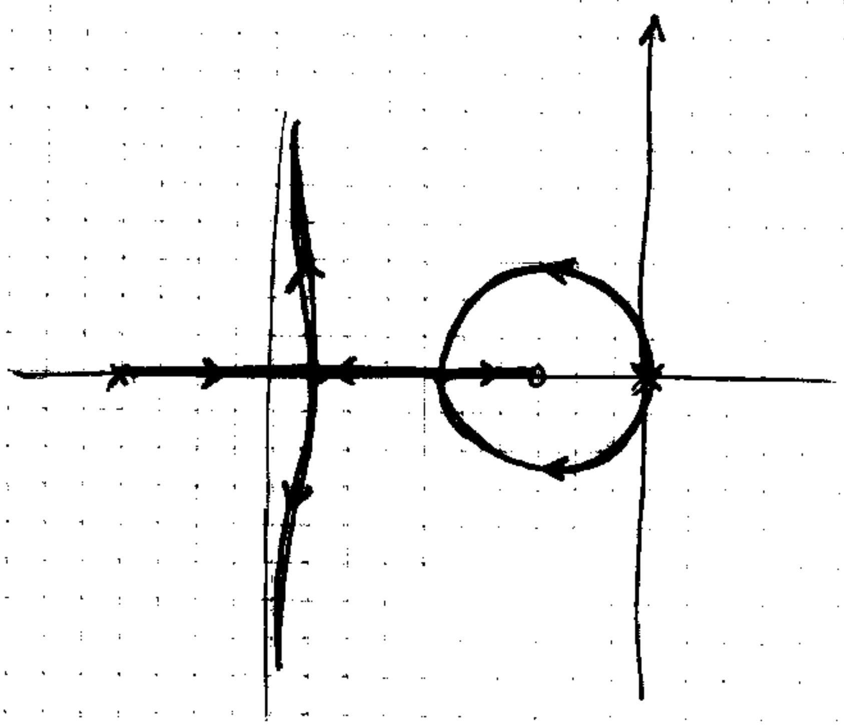
$s^2(s+10)-s(3s+20)(s+1)=0$

$s^2+10s-3s^2-3s-20s-20=0$

$-2s^2-13s-20=0$

$2s^2+13s+20=0$

$s_{12} = \frac{-13 \pm \sqrt{169-160}}{4} = \begin{cases} -4 \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$



s^3+10s^2+ks+k

1	k
10	k
$\frac{9k}{10}$	
k	

Stabilità per $K>0$

$\boxed{ES\,4}$

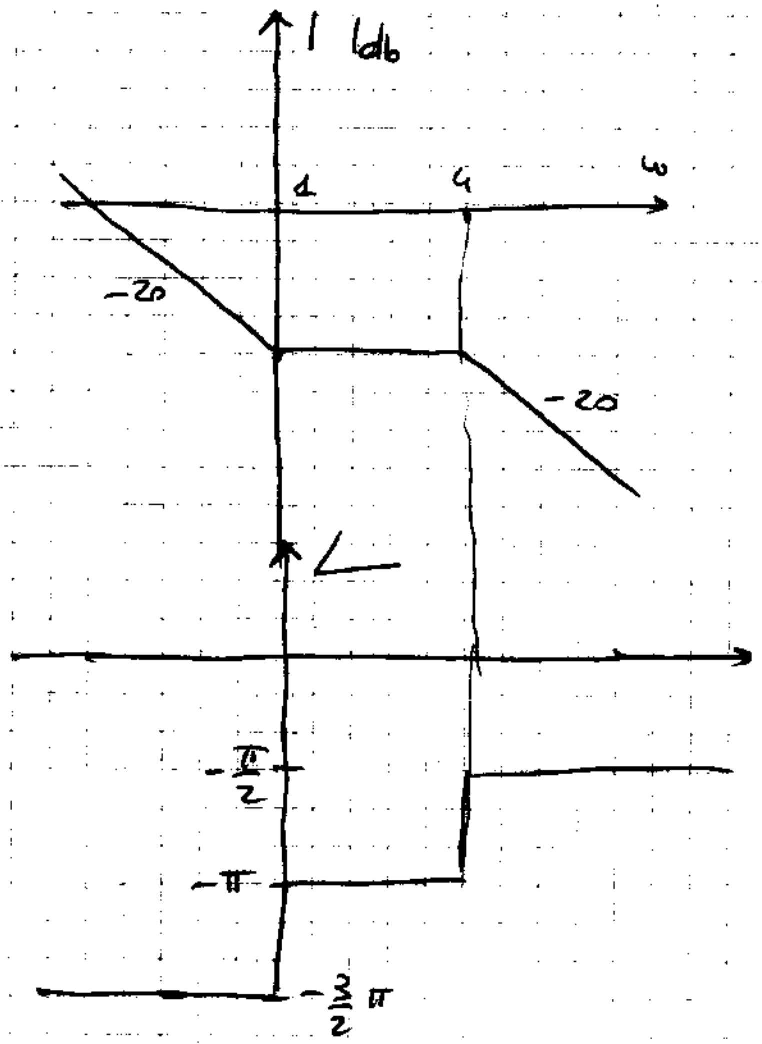
Forma di Bode

$$W(s) = -\frac{1}{4}\,\frac{1+s}{s(1-s/4)}$$

$$\left|-\frac{1}{4}\right|_{db} = 20\log\frac{1}{4} = -12db$$

Punti di spezzamento

$\overline{\omega} = 1$ e $\overline{\omega} = 4$



Nyquist

$$W(j\omega) = \frac{1+j\omega}{j\omega(j\omega-4)} = \frac{(1+j\omega)(j\omega+4)}{j\omega(-\omega^2-16)}$$

$$= \frac{(4-\omega^2)+5j\omega}{-j\omega(\omega^2+16)}$$

$$Re = -\frac{5}{\omega^2+16}$$

$$Im = \frac{4-\omega^2}{\omega(\omega^2+16)}$$

$\omega = 0^+ \quad Re = -\frac{5}{16} \quad Im = +\infty$

$\omega = +\infty \quad Re = Im = 0$

$\omega = 2 \quad Re = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4} \quad Im = 0$