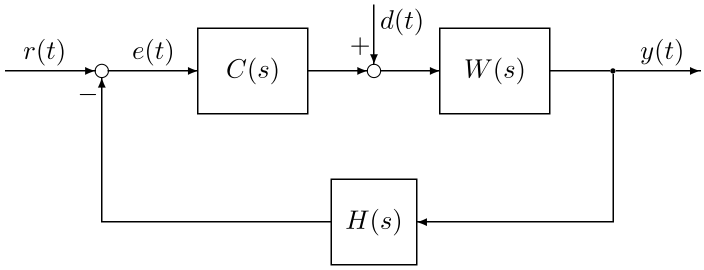
Prova Scritta di Controlli Automatici I del 4.9.01
Prof. Zampieri

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ______________

Non è ammessa la consultazione di libri, dispense, quaderni. Non si può usare la calcolatrice programmabile. Ogni risposta va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio-1 [8 pt]

Si consideri lo schema



dove

$$C(s) = \frac{K}{s+1}, \quad W(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad H(s) = H$$

e dove H e K sono due parametri reali. Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$ e sia invece $T_{dy}(s)$ la funzione di trasferimento tra il disturbo $d(t)$ e l'uscita $y(t)$.

1. Si determinino $T(s)$ e $T_{dy}(s)$ e le funzioni sensitivita' di $T(s)$ rispetto alle variazioni del parametro K.
2. Supponiamo che nominalmente $K = 1$ e che vari entro una fascia di $\pm 10\%$. Si determini per quali valori di H il guadagno in continua a catena chiusa è compreso entro il $\pm 5\%$ del suo valore nominale.
3. Si supponga che $H = 1$ e che $d(t) = cos(t)$ e $r(t) = 0$. Determinare l'andamento asintotico dell'uscita $y(t)$ in funzione dei K. Determinare il valore di K che rende massima l'ampiezza dell'uscita asintotica.

Esercizio-2 [8 pt]

Si consideri lo schema introdotto nell'esercizio precedente e si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{(s+1)^2}, \quad W(s) = \frac{s-1}{s^2+1}, \quad H(s) = 1,$$

1. Tracciate il luogo dei poli della funzione di traferimento a catena chiusa $T(s)$ al variare di $K \geq 0$ (si calcolino gli asintoti, gli angoli di uscita eventuali intersezione con l'asse immaginario e determinare il numero dei punti doppi reali attraverso lo studio della funzione che fornisce tali punti doppi).
2. Tracciate il luogo dei poli della funzione di traferimento a catena chiusa $T(s)$ al variare di $K \leq 0$.

Esercizio-3 [6 pt]

Sia

$$W(s) = K\frac{(s+1)^2}{s^2(s-4)}$$

la trasferenza della catena diretta di un sistema a catena chiusa con retroazione unitaria.

1. Tracciate il diagramma di Bode di $W(s)$ per $K = 1$.
2. Tracciate il diagramma di Nyquist di $W(s)$ per $K = 1$ (calcolare le intersezioni con gli assi).
3. Impiegando il criterio di Nyquist, discutete la stabilità del sistema a catena chiusa al variare di K.

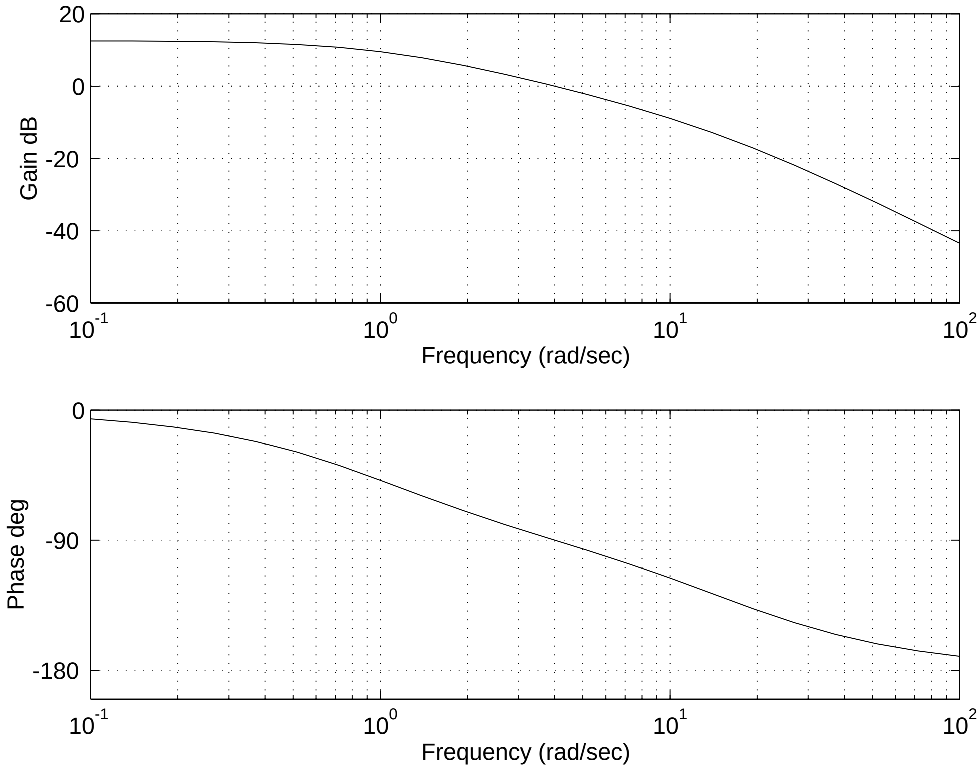


Figure 1: Diagramma di Bode.

Esercizio-4 [4 pt]

Si consideri un sistema avente il diagramma di Bode mostrato in Figura 1.

Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

a. errore a regime nullo in risposta al gradino unitario ed errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,25$;

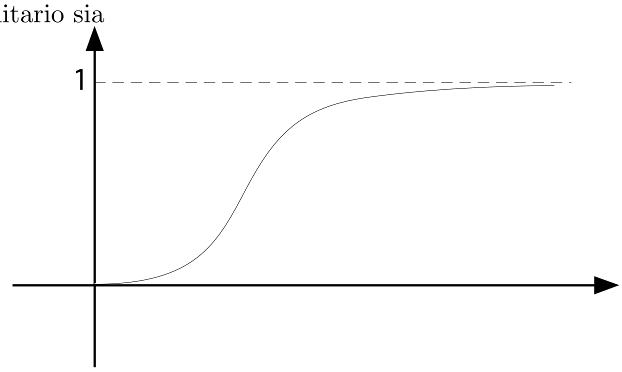
b. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 4$ rad/s;

c. margine di fase $m_\varphi = 45^o$.

Si richiede di calcolare i parametri c e q e di determinare, motivando la risposta, quale rete correttrice deve essere utilizzata senza calcolarne esplicitamente i parametri.

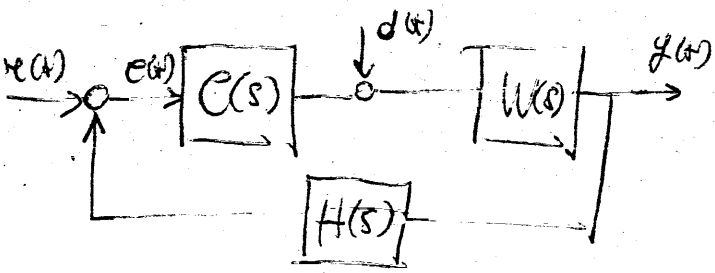
Esercizio-5 [4 pt]

Si consideri un sistema avente risposta impulsiva $w(t)$ contenente i modi e^{-t} e te^{-t} e funzione di trasferimento $W(s)$ strettamente propria. Si dica se il sistema è BIBO stabile. Supponendo inoltre che la risposta al gradino unitario sia



determinare $W(s)$. Le risposte vanno adeguatamente motivate.

$\boxed{\text{Es. 1}}$



1)
$$T(s) = T_{ry}(s) = \frac{C(s)W(s)}{1+H(s)C(s)W(s)}$$

$$= \frac{k(s-1)}{(s+1)^2 + Hk(s-1)}$$

$$T_{dy}(s) = \frac{W(s)}{1+H(s)C(s)W(s)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)^2+Hk(s-1)}$$

$$S_k^{CW} = \frac{k}{CW}\frac{dCW}{dk} = \cancel{k}\frac{\cancel{(s+1)^2}}{\cancel{k(s-1)}}\frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s+1)^2}} = 1$$

$$S_k^T = \frac{1}{1+H(s)C(s)W(s)} \quad S_k^{CW} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+Hk(s-1)}$$

2) Studiamo la stabilità

$$(s+1)^2 + Hk(s-1) = s^2+2s+1+Hk(s-1) = s^2+(Hk+2)s+(-Hk+1)$$

Per la regola di Cartesio si ha stabilità se e solo se

$$\begin{cases} Hk+2>0 \\ -Hk+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Hk>-2 \\ Hk<1 \end{cases} \quad \boxed{-2<Hk<1}$$

Sia $k=1$ e $\frac{\Delta k}{k} = 0.1$ (10%)

$$\frac{\Delta T}{T} = S_k^T \frac{\Delta k}{k} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \leq 0.05\,(5\%) \Leftrightarrow S_k^T\,0.1 \leq 0.05$$

$$S_k^T(0) \leq \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-H} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-1+H}{2(1-H)} < 0$$

$\frac{1}{2}\frac{H+1}{1-H} < 0 \Leftrightarrow H<-1$ e $H>1$ $\Rightarrow$ Tenendo conto della stabilità che richiede $-2<H<1$

Si ottiene $\boxed{-2<H<-1}$

3) Se il sistema è stabile $(-2<k<1)$ si ha che asintoticamente

$$y(t) = |T_{dy}(j)| \cos(t + \angle T_{dy}(j))$$

$$T_{dy}(j) = \frac{-2}{\cancel{-1}+2j+\cancel{1}+kj-k} = \frac{+2}{k+j(-2-k)}$$

$$|T_{dy}(j)| = \frac{2}{\sqrt{k^2+(k+2)^2}} \qquad \angle T_{dy}(j) = -\angle k+j(-2-k) = -\operatorname{artg}\frac{-2-k}{k}$$
$$= \operatorname{artg}\frac{2+k}{k} = \operatorname{artg}\left(1+\frac{2}{k}\right)$$

Ampiezza massima si ha quando $|T_d(j)|$ è massimo per $-2<k<1$ (stabilità) e ciò succede quando $f(k)=k^2+(k+2)^2$ è minimo. Si tratta di una parabola. Il minimo è dato da

$$f'(k) = 2k + 2(k+2) = 0$$
$$2k+2=0 \qquad \boxed{k=-1}$$

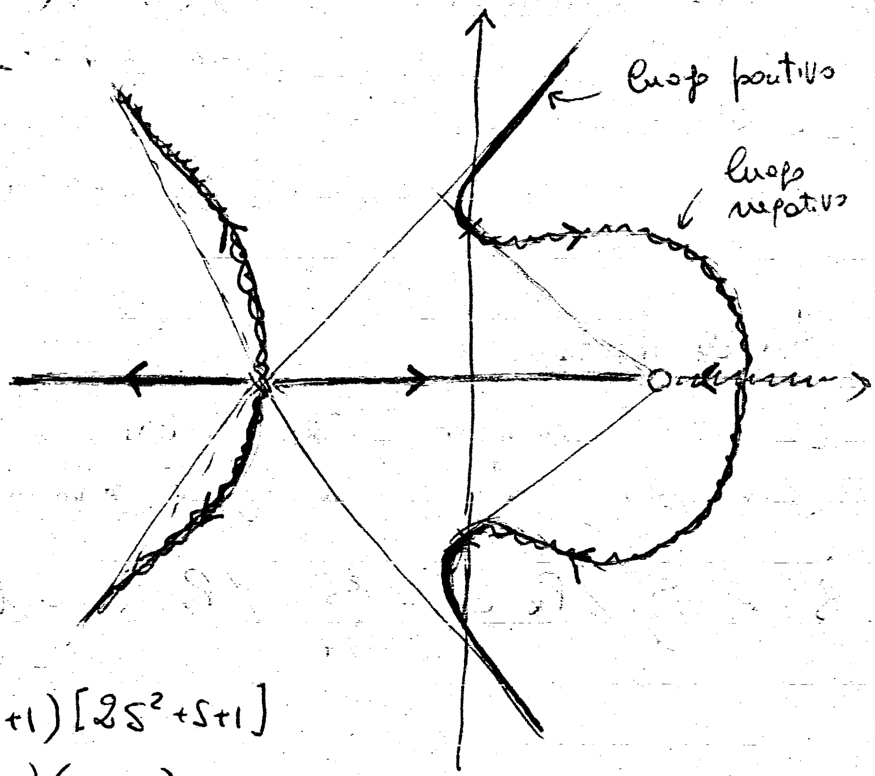
$\boxed{\text{Es 2}}$ $(s+1)^2(s^2+1)+k(s-1)=0$

Asintoti

$n=4$, $m=1$

$n-m=3$ asintoti

$\sigma_a = \dfrac{\sum p_i - \sum z_i}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$



Punti doppi

$$\begin{cases}(s+1)^2(s^2+1)+k(s-1)=0\\ 2(s+1)(s^2+1)+(s+1)^2 2s+k=0\end{cases}$$

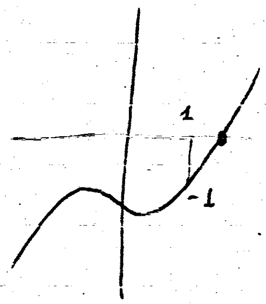
$k=-2(s+1)[s^2+1+s^2+s] = -2(s+1)[2s^2+s+1]$

$(s+1)^{\cancel{2}}(s^2+1)-2\cancel{(s+1)}(2s^2+s+1)(s-1)=0$

$s^3+s^2+s+1-4s^3+4s^2-2s^2+2s-2s+2=0$

$-3s^3+3s^2+s+3=0$ $\quad f(s)=s^3-s^2-\frac{1}{3}s-1=0$

$f'(s)=3s^2-2s-\frac{1}{3}$ $\quad s_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+1}}{3} \begin{array}{l} 0.8 \\ -0.14 \end{array}$



$f(s_1)=-1.4$

$f(s_2)=-0.9$

$f(1)=-1$

Possiamo concludere che c'è un solo punto doppio reale e che è >1 quindi appartenente al luogo negativo

Intersezione asse immaginario: tabella di Routh

$(s^2+2s+1)(s^2+1)+k(s-1)=0$

$s^4+s^2+2s^3+2s+s^2+1+k(s-1)=0$

$s^4+2s^3+2s^2+(k+2)s+(1-k)=0$

4	1	2	$1-k$
3	2	$k+2$	
2	$\frac{2-k}{2}$	$1-k$	
1	$\frac{k^2-4k}{k-2}$	$\longrightarrow k_{1,2}=0 \text{ e } 4$	
0	$1-k$		

Si ha le intersezioni quando una riga è nulla e ciò avviene per $k=0$ e 4

La riga precedente rappresenta il polinomio

$$\frac{2-k}{2} s^2 + (1-k) = 0 \quad \begin{cases} \xrightarrow{k=0} \quad s^2+1=0 \quad - \quad s_{12} = \pm j \\ \xrightarrow{k=4} \quad s^2+3=0 \quad - \quad s_{12} = \pm j\sqrt{3} \end{cases}$$

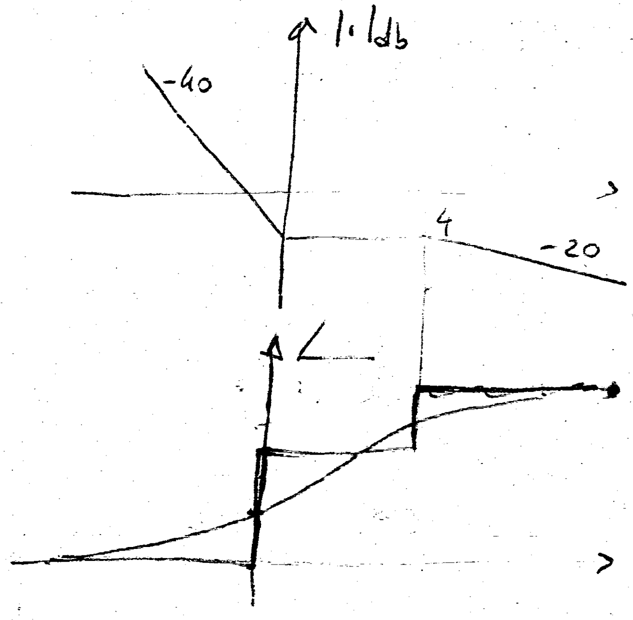
<u>Angoli uscita</u>

L'unico angolo non banale è quello di uscita dal polo in j (in $-j$ è simmetrico) che vale

$$\beta_k^+ = \sum_{i} \angle p_k - z_i - \sum_{i \neq k} \angle p_k - p_i = 135° - (90+45+45) + 180$$
$$= 135°$$

$\boxed{ES3}$ $k = 1$

1) $W(s) = \dfrac{(s+1)^2}{s^2(s-4)} = -\dfrac{1}{4}\,\dfrac{(1+s)^2}{s^2(1-\frac{s}{4})}$



punti di spezzamento

$T_0 = 1$ $\dfrac{1}{T_0} = 1$

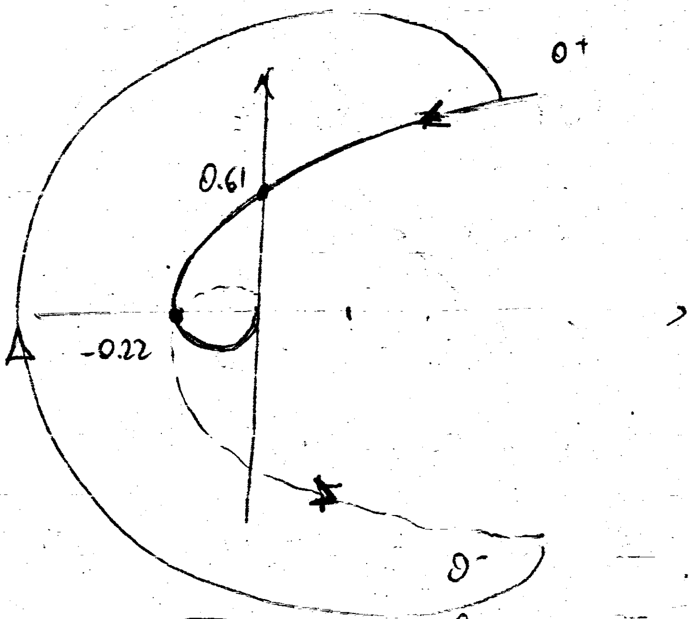
$T_1 = \dfrac{1}{4}$ $\dfrac{1}{T_1} = 4$

$K_{Bode} = -\dfrac{1}{4}$

2) $W(j\omega) = \dfrac{(1-\omega^2)+2j\omega}{-\omega^2(-4+j\omega)} =$

$= \dfrac{(1-\omega^2)+2j\omega}{\omega^2(4-j\omega)} =$

$= \dfrac{[(1-\omega^2)4-2\omega^2]+j\omega[8+1-\omega^2]}{\omega^2(16+\omega^2)}$



$Re = \dfrac{-6\omega^2+4}{\omega^2(16+\omega^2)}$

$Im = \dfrac{9-\omega^2}{\omega(16+\omega^2)}$

$\omega \to 0^+$ $Re \to +\infty$
$Im \to +\infty$

$Re = 0$ $\omega = \sqrt{2/3}$ $Im = \dfrac{9-2/3}{\sqrt{2/3}\,(16+2/3)} = 0.61$

$Im = 0$ $\omega = 3$ $Re = \dfrac{-50}{9\cdot 25} = -0.22 \simeq -2/9$

3) $P = 1$ $Z = P - N$

$-\dfrac{1}{k} < -0.22 \ (\simeq -2/9) \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 2$ $0 < k < 9/2$

$-0.22 < -\dfrac{1}{k} < 0 \Rightarrow N = +1 \Rightarrow Z = 0$ $k > 9/2$

$-1/k > 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 1$ $k < 0$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

Dal grafico (diagramma di Bode) si deduce che

$W(0) \cong 12\,db$ $\quad W(0) \simeq 4$ $\quad h_p = 0$

$|W(4j)| = 0\,db$ $\quad |W(4j)| = 1$

$\angle W(4j) = -90°$

$h_c = \overset{1}{h} - \overset{0}{h_p} = 1$ $\quad h=1$ perché voglio errore nullo e regime nello inseguimento al gradino.

$$k_c = \frac{1}{W(0)}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{4}\frac{1}{0.25} = 1$$

$$\hat{W}(s) = W(s)\frac{k_c}{s^{h_c}} = \frac{W(s)}{s}$$

$$|\hat{W}(j4)| = \frac{|W(4j)|}{4} = \frac{1}{4} \qquad C = 4$$

$$\angle \hat{W}(j4) = \angle W(4j) - 90° = -180°$$

$$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^* = 45° - (180-180) = 45° \qquad q = tg\,45 = 1$$

Serve una rete anticipatrice

$\boxed{\text{ES. 5}}$

Se $w(t) = \alpha e^{-t} + \beta t e^{-t} \Rightarrow W(s) = \dfrac{b(s)}{(s+1)^2}$

$W(s)$ strettamente proprio $\Rightarrow$ grado $b(s) = 1 \Rightarrow b(s) = b_1 s + b_0$

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s+1)^2}$$

Dal grafico si deduce che la $y(t)$ che è la risposta al gradino ha

$y(\infty) = 1 \quad \Rightarrow W(0) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{b_1 = 0 \quad b_0 = 1}$

$y'(0) = 0$ derivata nulla $\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} y'(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\left[s\dfrac{W(s)}{s}\right] = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{b_1 s^2 + b_0}{(s+1)^2} = b_1 = 0$