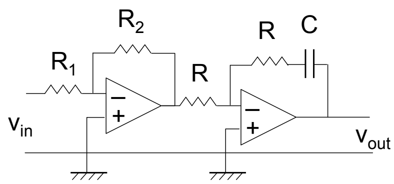
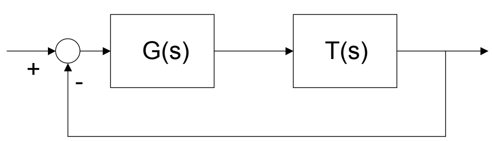
Compito di Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2006
Versione A

Esercizio 1A. Dato lo schema seguente (operazionali ideali)



é richiesto di calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra v_{in} e v_{out}. Si consideri quindi la seguente connessione in retroazione



dove $T(s) = \frac{2}{s+2}$. É richiesto il calcolo del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ e del prodotto RC, sapendo che il sistema ad anello é chiuso é stabile, risponde alla rampa unitaria con un errore a regime pari a $e_{reg} = 0.1$, ed ammette una pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c = 10$.

Esercizio 2A. Data $G(s) = \frac{5(s^2+s+1)}{(s+10)(s+0.1)}$, é richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$;
- impiegare il Criterio di Nyquist per studiare la stabilitá ad anello chiuso di $kG(s)$, al variare del parametro reale k, in particolare determinando il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla.

Esercizio 3A. Data $G(s) = \frac{k(s+1)}{(s+\frac{5}{3})^2(s-5)}$, é richiesto di

- tracciare il luogo delle radici ($k > 0$), evidenziando in particolare asintoti e punti doppi;

- studiare (senza ricorrere a Routh) la stabilitá del sistema ad anello chiuso (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla) al variare di $k > 0$;

- determinare i valori di $k > 0$ per cui nessun modo del sistema ad anello chiuso ha andamento oscillatorio.

Esercizio 4A. Data $G(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$, si vuole progettare un compensatore $C(s)$ stabilizzante in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

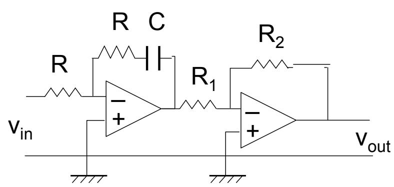
- errore a regime alla rampa pari a circa 0.01;

- pulsazione di attraversamento circa uguale a 0.1;

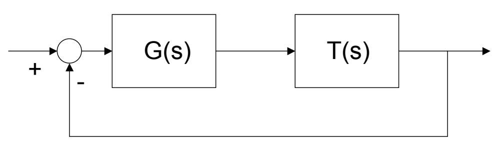
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú.

Compito di Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2006
Versione B

Esercizio 1B. Dato lo schema seguente (operazionali ideali)



é richiesto di calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra v_{in} e v_{out}. Si consideri quindi la seguente connessione in retroazione



dove $T(s) = \frac{5}{s+5}$. É richiesto il calcolo del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ e del prodotto RC, sapendo che il sistema ad anello é chiuso é stabile, risponde alla rampa unitaria con un errore a regime pari a $e_{reg} = 0.01$, ed ammette una pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c = 100$.

Esercizio 2B. Data $G(s) = \frac{2(s^2-s+1)}{(s-10)(s-0.1)}$, é richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$;
- impiegare il Criterio di Nyquist per studiare la stabilitá ad anello chiuso di $kG(s)$, al variare del parametro reale k, in particolare determinando il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla.

Esercizio 3B. Data $G(s) = \frac{k(s-1)}{(s-\frac{5}{3})^2(s+5)}$, é richiesto di

- tracciare il luogo delle radici ($k > 0$), evidenziando in particolare asintoti e punti doppi;

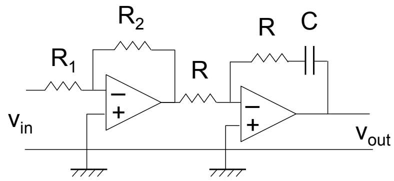
- studiare (senza ricorrere a Routh) la stabilitá del sistema ad anello chiuso (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla) al variare di $k > 0$;
- determinare i valori di $k > 0$ per cui nessun modo del sistema ad anello chiuso ha andamento oscillatorio.

Esercizio 4B. Data $G(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})^2}$, si vuole progettare un compensatore $C(s)$ stabilizzante in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

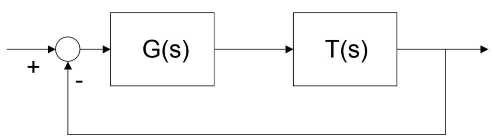
- errore a regime alla rampa pari a circa 0.1;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 1;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú.

Compito di Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2006
Versione A - Soluzioni

Esercizio 1A. Dato lo schema seguente (operazionali ideali)



é richiesto di calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra v_{in} e v_{out}. Si consideri quindi la seguente connessione in retroazione



dove $T(s) = \frac{2}{s+2}$. É richiesto il calcolo del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ e del prodotto RC, sapendo che il sistema ad anello é chiuso é stabile, risponde alla rampa unitaria con un errore a regime pari a $e_{reg} = 0.1$, ed ammette una pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c = 10$.

Soluzione. Il primo operazionale realizza $-\frac{R_2}{R_1}$, mentre il secondo $-\frac{1+sRC}{sRC}$, per cui $G(s)$ é il loro prodotto, $G(s) = \frac{R_2}{R_1RC}\frac{1+sRC}{s}$. Scrivendo in forma di Bode $T(s)$, si arriva a

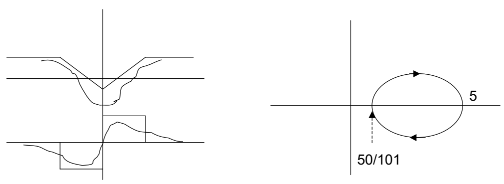
$$T(s)G(s) = \frac{R_2}{R_1RC}\frac{1+sRC}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

che ha un integratore, per cui l'errore a regime al gradino del sistema ad anello chiuso é nullo mentre quello alla rampa vale $\frac{R_1RC}{R_2} = 0.1$ da cui $R_2 = 10R_1RC$. Sostituendo si ottiene $G(s)T(s) = 10\frac{1+sRC}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)}$. Poiché $\frac{10}{s}$ ha proprio $\omega_c = 10$, e la presenza di una coppia zero-polo sposterebbe inevitabilmente ω_c, a meno che polo e zero non abbiano lo stesso modulo, ne consegue facilmente che deve comparire una cancellazione zero-polo, cioé $RC = 0.5$ e quindi $G(s)T(s) = \frac{10}{s}$. Un modo alternativo é imporre $|G(10i)T(10i)|^2 = 1$, che conduce facilmente allo stesso risultato. Che poi l'anello chiuso sia stabile é evidente. Quindi $RC = 0.5$ e $\frac{R_2}{R_1} = 5$.

Esercizio 2A. Data $G(s) = \frac{5(s^2+s+1)}{(s+10)(s+0.1)}$, é richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$;
- impiegare il Criterio di Nyquist per studiare la stabilitá ad anello chiuso di $kG(s)$, al variare del parametro reale k, in particolare determinando il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla.

Soluzione. Bode e Nyquist sono indicati in figura

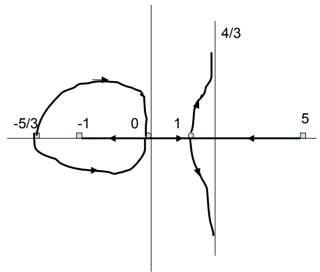


Motivi di simmetria garantiscono che la fase si annulli per $\omega = 1$, per cui le intersezioni con l'asse delle ascisse sono i punti $G(i) = \frac{50}{101}$ e $G(0) = G(\infty) = 5$. L'immagine speculare coincide con il diagramma di Nyquist stesso, per cui in pratica la curva chiusa é percorsa due volte. Allora é immediato rendersi conto che, essendo $G_+ = 0$, per $k \geq 0$ non circondiamo il punto -1 e si ha quindi stabilitá, mentre per $k < 0$ tutto dipende dalla posizione relativa dei punti $\frac{50}{101}k, -1, 5k$. Comunque, nel caso il punto -1 sia circondato, i giri sono due, ed orari, cioé $N_G = -2$ e quindi $W_+ = 2$. In conclusione, si ha stabilitá per $k > -\frac{1}{5}$ e per $k < -\frac{101}{50}$, ed instabilitá per $-\frac{101}{50} < k < -\frac{1}{5}$, con due poli a parte reale positiva. Per $k = -\frac{101}{50}$ é immediata la verifica della presenza di due poli immaginari puri ($\omega_n = 1, \xi = 0$), mentre per $k = -\frac{1}{5}$ la FDT diventa impropria ed instabile (un polo nullo ed uno all'infinito).

Esercizio 3A. Data $G(s) = \frac{k(s+1)}{(s+\frac{5}{3})^2(s-5)}$, é richiesto di

- tracciare il luogo delle radici ($k > 0$), evidenziando in particolare asintoti e punti doppi;
- studiare (senza ricorrere a Routh) la stabilitá del sistema ad anello chiuso (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla) al variare di $k > 0$;
- determinare i valori di $k > 0$ per cui nessun modo del sistema ad anello chiuso ha andamento oscillatorio.

Soluzione. L'equazione dei punti doppi porge facilmente $s = -\frac{5}{3}, 0, 1$. Tutti i punti sono accettabili, in quanto $-\frac{5}{3}$ é il polo doppio ad anello aperto ($k = 0$), e gli altri due corrispondono a valori positivi di k (0 per $k = \frac{125}{9}$, 1 per $k = \frac{128}{9}$). Infine c'é un asintoto verticale centrato in $\frac{4}{3}$, da cui il luogo di figura

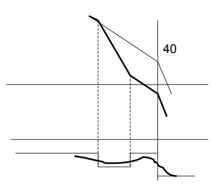


Modi non oscillatori sono presenti solo quando i poli sono tutti reali il che accade, oltre che per $k = 0$, solo per $\frac{125}{9} \leq k \leq \frac{128}{9}$. Piú precisamente, per $k < \frac{125}{9}$ si ha un polo positivo e due complessi a parte reale negativa, per $k = \frac{125}{9}$ un polo positivo e due nulli, per $\frac{125}{9} < k \leq \frac{128}{9}$ un polo negativo e due positivi, per $k > \frac{128}{9}$ un polo negativo e due complessi a parte reale positiva. Quindi il sistema ad anello chiuso non é mai stabile, per nessun valore di $k \geq 0$.

Esercizio 4A. Data $G(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$, si vuole progettare un compensatore $C(s)$ stabilizzante in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

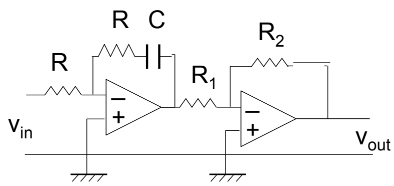
- errore a regime alla rampa pari a circa 0.01;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 0.1;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú.

Soluzione. Il requisito alla rampa impone l'utilizzo di $\frac{10}{s}$. Da Bode per $\frac{10}{s}G(s)$ si comprende la necessitá di ricorrere ad una rete ritardatrice, che anticipi il punto di attraversamento. In effetti ad esempio $C(s) = 10\frac{1+10^2 s}{s(1+10^5 s)}$ soddisfa a tutte le specifiche, come evidente dal diaframma di Bode sotto riportato di $C(s)G(s)$.

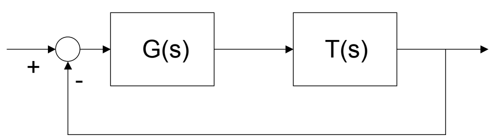


Compito di Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2006
Versione B - Soluzioni

Esercizio 1B. Dato lo schema seguente (operazionali ideali)



é richiesto di calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra v_{in} e v_{out}. Si consideri quindi la seguente connessione in retroazione



dove $T(s) = \frac{5}{s+5}$. É richiesto il calcolo del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ e del prodotto RC, sapendo che il sistema ad anello é chiuso é stabile, risponde alla rampa unitaria con un errore a regime pari a $e_{reg} = 0.01$, ed ammette una pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c = 100$.

Soluzione. Il secondo operazionale realizza $-\frac{R_2}{R_1}$, mentre il primo $-\frac{1+sRC}{sRC}$, per cui $G(s)$ é il loro prodotto, $G(s) = \frac{R_2}{R_1 RC}\frac{1+sRC}{s}$. Scrivendo in forma di Bode $T(s)$, si arriva a

$$T(s)G(s) = \frac{R_2}{R_1 RC}\frac{1+sRC}{s\left(1+\frac{s}{5}\right)}$$

che ha un integratore, per cui l'errore a regime al gradino del sistema ad anello chiuso é nullo mentre quello alla rampa vale $\frac{R_1 RC}{R_2} = 0.01$ da cui $R_2 = 100 R_1 RC$. Sostituendo si ottiene $G(s)T(s) = 100\frac{1+sRC}{s\left(1+\frac{s}{5}\right)}$. Poiché $\frac{100}{s}$ ha proprio $\omega_c = 100$, e la presenza di una coppia zero-polo sposterebbe inevitabilmente ω_c, a meno che polo e zero non abbiano lo stesso modulo, ne consegue facilmente che deve comparire una cancellazione zero-polo, cioé $RC = 0.2$ e quindi $G(s)T(s) = \frac{100}{s}$. Un modo alternativo é imporre $|G(10i)T(10i)|^2 = 1$, che conduce facilmente allo stesso risultato. Che poi l'anello chiuso sia stabile é evidente. Quindi $RC = 0.2$ e $\frac{R_2}{R_1} = 20$.

Esercizio 2B. Data $G(s) = \frac{2(s^2-s+1)}{(s-10)(s-0.1)}$, é richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$;
- impiegare il Criterio di Nyquist per studiare la stabilitá ad anello chiuso di $kG(s)$, al variare del parametro reale k, in particolare determinando il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla.

Soluzione. Bode e Nyquist sono simili alla versione A. Il modulo é simile ma un pó piú basso, la fase invertita (specularmente rovesciata rispetto all'asse delle ascisse), Nyquist simile, con punti reali 2 e $\frac{20}{101}$, ma percorso in verso opposto (antiorario). É immediato rendersi conto che, essendo $G_+ = 2$, per $k \geq 0$ non circondiamo il punto -1 e si ha quindi instabilitá ($W_+ = 2$), mentre per $k < 0$ tutto dipende dalla posizione relativa dei punti $\frac{20}{101}k, -1, 2k$. Comunque, nel caso il punto -1 sia circondato, i giri sono due, ed antiorari, cioé $N_G = 2$ e quindi $W_+ = 2-2 = 0$. In conclusione, si ha instabilitá per $k > -\frac{1}{2}$ e per $k < -\frac{101}{20}$, con due poli a parte reale positiva, e stabilitá per $-\frac{101}{20} < k < -\frac{1}{2}$. Per $k = -\frac{101}{20}$ é immediata la verifica della presenza di due poli immaginari puri ($\omega_n = 1, \xi = 0$), mentre per $k = -\frac{1}{2}$ la FDT diventa impropria ed instabile (un polo nullo ed uno all'infinito).

Esercizio 3B. Data $G(s) = \frac{k(s-1)}{(s-\frac{5}{3})^2(s+5)}$, é richiesto di

- tracciare il luogo delle radici ($k > 0$), evidenziando in particolare asintoti e punti doppi;
- studiare (senza ricorrere a Routh) la stabilitá del sistema ad anello chiuso (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla) al variare di $k > 0$;
- determinare i valori di $k > 0$ per cui nessun modo del sistema ad anello chiuso ha andamento oscillatorio.

Soluzione. L'equazione dei punti doppi porge facilmente $s = -1, 0, \frac{5}{3}$. Tutti i punti sono accettabili, in quanto $\frac{5}{3}$ é il polo doppio ad anello aperto ($k = 0$), e gli altri due corrispondono a valori positivi di k (0 per $k = \frac{125}{9}$, -1 per $k = \frac{128}{9}$). Infine c'é un asintoto verticale centrato in $-\frac{4}{3}$, da cui il luogo che risulta esattamente la versione speculare rispetto all'asse immaginario del luogo della versione A. Modi non oscillatori sono presenti solo quando i poli sono tutti reali il che accade, oltre che per $k = 0$, solo per $\frac{125}{9} \leq k \leq \frac{128}{9}$. Piú precisamente, per $k < \frac{125}{9}$ si ha un polo negativo e due complessi a parte reale positiva, per $k = \frac{125}{9}$ un polo negativo e due nulli, per $\frac{125}{9} < k \leq \frac{128}{9}$ un polo positivo e due negativi, per $k > \frac{128}{9}$ un polo positivo e due complessi a parte reale negativa. Quindi il sistema ad anello chiuso non é mai stabile, per nessun valore di $k \geq 0$.

Esercizio 4B. Data $G(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})^2}$, si vuole progettare un compensatore $C(s)$ stabilizzante in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa pari a circa 0.1;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 1;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú.

Soluzione. Il requisito alla rampa impone l'utilizzo di $\frac{2}{s}$. Da Bode per $\frac{2}{s}G(s)$ si comprende la necessitá di ricorrere ad una rete ritardatrice, che anticipi il punto di attraversamento. In effetti ad esempio $C(s) = 2\frac{1+10s}{s(1+100s)}$ soddisfa a tutte le specifiche.