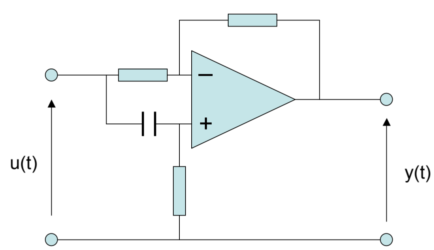
Compito di Fondamenti di Automatica
settembre 2006

Esercizio 1. Si consideri lo schema di figura (operazionale ideale, eccetto per il guadagno che puó essere definito da una $G(s)$, resistenze uguali, condensatori uguali, $RC = 1$, $u(t)$ tensione d'ingresso, $y(t)$ tensione d'uscita). É richiesto di:

- nell'ipotesi di operazionale ideale, calcolare la funzione di trasferimento;
- nell'ipotesi di operazionale caratterizzato da $Y(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{K}{1+s}$, calcolare la funzione di trasferimento (K parametro reale);
- nelle stesse ipotesi del punto precedente, studiare la stabilitá del sistema e scrivere l'espressione dei suoi modi.



Esercizio 2. Data $G(s) = K\frac{s^2+1}{s(1-s)}$, é richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- impiegare il Criterio di Nyquist per studiare la stabilitá ad anello chiuso, in particolare determinando il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla, al variare del guadagno reale K.

Esercizio 3. Data $G(s) = \frac{K(s+9)}{\left(s+\frac{15}{4}\right)^2(s+1)}$, é richiesto di:

- tracciare il luogo delle radici ($K > 0$), evidenziando in particolare asintoti, punti doppi ed intersezioni con gli assi;
- determinare i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- determinare i valori di K positivi per cui sono assenti modi del sistema ad anello chiuso con andamento oscillatorio:
- determinare il valore dei tre poli quando due di essi sono immaginari puri.

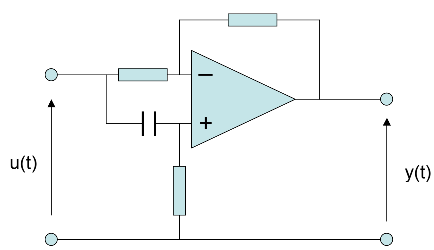
Esercizio 4. Data $G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$, si vogliono progettare due compensatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ stabilizzanti in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa pari a circa 0.1;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 100 per C_1, e a 10 per C_2;
- margine di fase elevato, di quasi 90^o, per C_1, e di circa 45^o per C_2.

Compito di Fondamenti di Automatica
settembre 2006 - Soluzioni

Esercizio 1. Si consideri lo schema di figura (operazionale ideale, eccetto per il guadagno che puó essere definito da una $G(s)$, resistenze uguali, condensatori uguali, $RC = 1$, $u(t)$ tensione d'ingresso, $y(t)$ tensione d'uscita). É richiesto di:

- nell'ipotesi di operazionale ideale, calcolare la funzione di trasferimento;
- nell'ipotesi di operazionale caratterizzato da $Y(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{K}{1+s}$, calcolare la funzione di trasferimento (K parametro reale);
- nelle stesse ipotesi del punto precedente, studiare la stabilitá del sistema e scrivere l'espressione dei suoi modi.



Soluzione. Si ottiene facilmente

$$V_+(s) = \frac{s}{s+1}U(s),\ U(s) + Y(s) = 2V_-(s)$$

Nel caso ideale, $V_+(s) = V_-(s)$ da cui la FDT $W(s) = \frac{s-1}{s+1}$. Nel secondo caso si perviene a

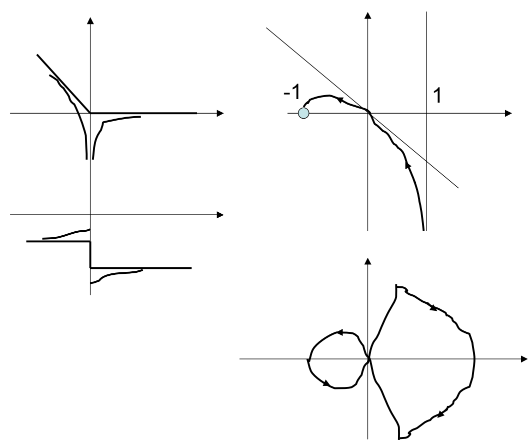
$$W(s) = \frac{\frac{s-1}{s+1}G(s)}{2 + G(s)} = \frac{K(s-1)}{(s+1)(2s+2+K)}$$

che é stabile per $K > -2$, ed ha modi e^{-t} e $e^{-\left(1+\frac{K}{2}\right)t}$.

Esercizio 2. Data $G(s) = K\frac{s^2+1}{s(1-s)}$, é richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- impiegare il Criterio di Nyquist per studiare la stabilitá ad anello chiuso, in particolare determinando il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla, al variare del guadagno reale K.

Soluzione. Bode e Nyquist (per $K = 1$) sono indicati in figura



Le uniche intersezioni con gli assi sono l'origine (per $\omega = 1$) ed il punto -1 (per $\omega = \infty$), mentre l'asintoto é chiaramente piazzato a $+1$. Da notare il picco di antirisonanza infinito e la discontinuitá di fase di 180^o. Chiudendo Nyquist con l'immagine speculare, e notando che $G_+ = 1$, abbiamo $N_G = +1$ (e quindi stabilitá, $W_+ = 0$) se $K > 1$, mentre $N_G = 0$ (e quindi instabilitá con $W_+ = 1$, cioé un polo stabile ed uno instabile) se $0 < K < 1$. Infine per $K < 0$ possiamo ruotare Nyquist di 180^o o, equivalentemente, valutare i giri attorno a $+1$ invece che a -1. Si ha cosí $N_G = -1$ da cui $W_+ = 2$ (e quindi instabilitá con due poli a parte reale positiva). Se $K = 0$ abbiamo un polo nullo ed uno positivo (quelli di $G(s)$), mentre se $K = 1$ un calcolo diretto conduce ad un polo negativo ed uno all'infinito (FDT impropria), in accordo al fatto che Nyquist tende a -1 per ω tendente all'infinito.

Esercizio 3. Data $G(s) = \frac{K(s+9)}{\left(s+\frac{15}{4}\right)^2(s+1)}$, é richiesto di:

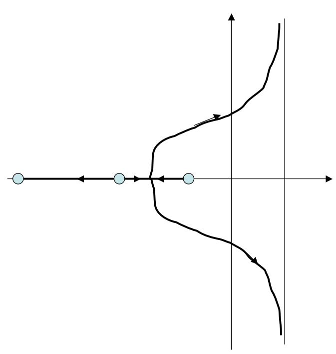
- tracciare il luogo delle radici ($K > 0$), evidenziando in particolare asintoti, punti doppi ed intersezioni con gli assi;

- determinare i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- determinare i valori di K positivi per cui sono assenti modi del sistema ad anello chiuso con andamento oscillatorio:
- determinare il valore dei tre poli quando due di essi sono immaginari puri.

Soluzione. L'equazione dei punti doppi porge

$$\left(s+\frac{15}{4}\right)(s+2)(s+12)=0$$

ottenuta dopo aver raccolto il termine comune $\left(s+\frac{15}{4}\right)$ ed aver quindi risolto la rimanente equazione di secondo grado, da cui il punto doppio $s=-2$ per $K=\frac{7}{16}\simeq 0.44$ ($s=-12$ va escluso, non appartenendo al luogo, ed infatti esso corrisponde ad un valore negativo di K, $K=-\frac{3993}{4}\simeq -998$, mentre $s=-\frac{15}{4}$ é il punto doppio di partenza del luogo, corrispondente a $K=0$).



L'asintoto (verticale) é posizionato nel punto $s=\frac{1}{4}=0.25$. Dalla figura é evidente che ci sará assenza di fenomeni oscillatori per $K\leq\frac{7}{16}$, e stabilitá per $K<K_0$ (K_0 essendo il valore per cui il luogo attraversa l'asse immaginario). Applicando ad esempio Routh, si ottiene il polinomio da studiare seguente

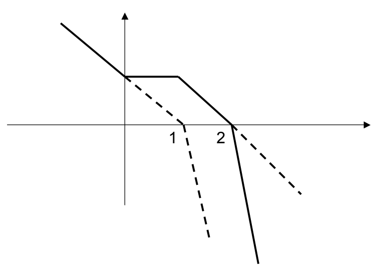
$$s^3+\frac{17}{2}s^2+\left(\frac{345}{16}+K\right)s+\left(\frac{225}{16}+9K\right)$$

e la tabella di Routh dimostra che si ha stabilitá per $K<K_0=\frac{5415}{16}\simeq 338$, mentre per $K>K_0$ appaiono due variazioni di segno e pertanto due poli a parte reale positiva, in accordo al luogo riportato in figura. Per $K = K_0$ si ha il passaggio per l'asse immaginario, ed é semplice la verifica che il polinomio caratteristico ad anello chiuso, per $K = K_0$, diventa $\left(s + \frac{17}{2}\right)(s^2 + 360)$, da cui i tre poli $s = -\frac{17}{2}, \pm i6\sqrt{10}$ e le cercate intersezioni con gli assi $s = \pm i6\sqrt{10}$.

Esercizio 4. Data $G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$, si vogliono progettare due compensatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ stabilizzanti in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa pari a circa 0.1;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 100 per C_1, e a 10 per C_2;
- margine di fase elevato, di quasi 90^o, per C_1, e di circa 45^o per C_2.

Soluzione. Il requisito alla rampa impone l'utilizzo di $\frac{10}{s}$. Da Bode per $\frac{10}{s}G(s)$, essendo giá $\omega_c \simeq 100$, si comprende la necessitá di ricorrere ad una rete anticipatrice, per migliorare la fase.



É sufficiente introdurre una cancellazione zero-polo ed aggiungere un polo in alta frequenza, cioé

$$C_1(s) = \frac{10}{s}\frac{1+\frac{s}{100}}{1+\frac{s}{p}},\ p >> 1000 \text{ oppure } C_1(s) = 10\frac{1+\frac{s}{100}}{s}$$

poiché causa la presenza dell'integratore la FDT é giá propria e non é necessario ricorrere al polo in alta frequenza. Nel secondo caso é ovviamente necessaria una rete ritardatrice, ed é evidente che si puó ricorrere questa volta ad una doppia cancellazione zero-polo, del tipo

$$C_2(s) = \frac{10}{s}\frac{1+\frac{s}{100}}{1+s}$$