Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

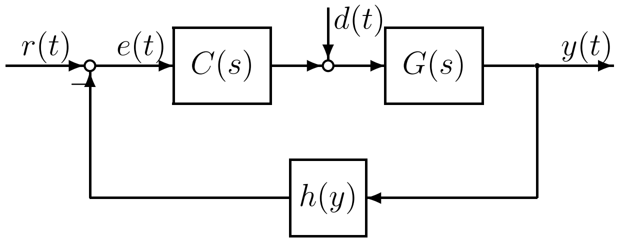
Insegnamento di FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2003-2004)

2º COMPITINO - 17 novembre 2003

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente



dove

$$G(s) = \frac{1-s}{1+2s}$$

1. Supponiamo che $C(s) = \frac{1}{s^2}$ e che $h(y) = y$. Determinare il diagramma di Bode e di Nyquist di $C(s)G(s)$ (si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e immaginario).
2. Supponiamo ora che $C(s) = \frac{K}{s^2}$ e che $h(y) = y$. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di K attraverso il criterio di Nyquist.
3. Supponiamo infine che $C(s) = K$ e che $h(0) = 0$ e $1 < h(y)/y < 2$. Studiare la stabilita' del sistema al variare di $K > 0$ attraverso il criterio del cerchio (si fornisca la dimostrazione analitica e non quella grafica).

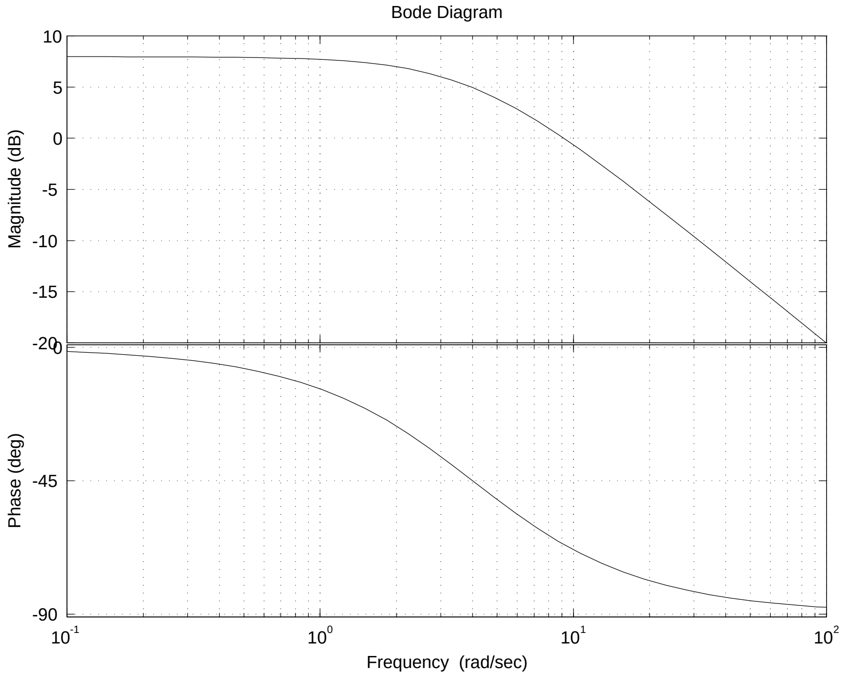
Esercizio 2. Si consideri lo schema precedente dove $h(y) = y$ e dove

$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$

Si determini $C(s)$ in modo tale che l'errore a regime sia nullo e il sistema in catena chiusa abbia una risposta impulsiva contenente i modi te^{-t} e $e^{-t}\cos(t)$.

Esercizio 3.
1. Dimostrare che la connessione in retroazione di funzioni di trasferimento $W(s), H(s)$ positive reali e' una funzione di trasferimento positiva reale (si supponga di sapere che l'inversa di una funzione positiva reale e' positiva reale e che la somma di funzioni positive reale e' positiva reale).
2. (FACOLTATIVA) Dimostrare che la connessione in retroazione di una funzione di trasferimento $W(s)$ positiva reale con una funzione di trasferimento $H(s) = K > 0$ e' BIBO stabile.

Esercizio 4. Si consideri lo schema precedente dove $h(y) = y$ e dove $G(s)$ ha diagramma di Bobe illustrato nella figura seguente.



Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si determini un controllore $C(s)$ che garantisca che le seguenti specifiche siano soddisfatte:

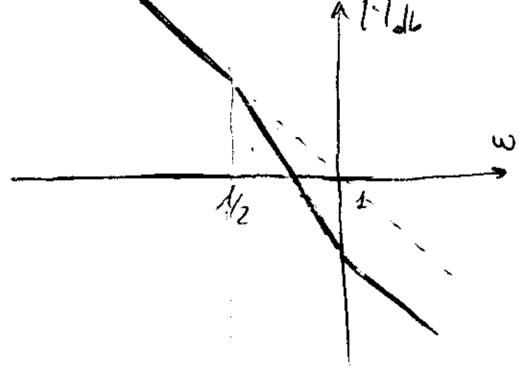
a. il sistema controllato abbia errore a regime in risposta alla rampa ≤ 0.1;

b. la pulsazione di attraversamento sia $\omega_A = 4$ rad/s;

c. il margine di fase risultante sia $m_\phi \geq 60^{\rm o}$.

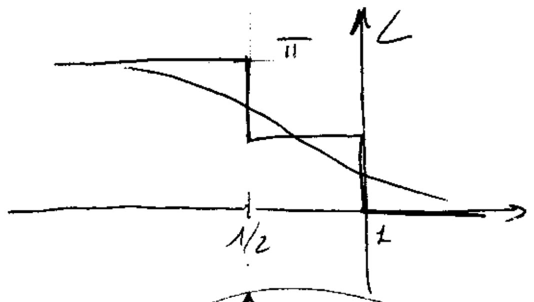
Si richiede di determinare il tipo di rete compensatrice (ritardatrice, anticipatrice, a sella) riportandone la funzione di trasferimento senza calcolarne esplicitamente i parametri.

ES. 1 Bode



1) $W(s) \triangleq C(s)G(s) = \dfrac{1-s}{s^2(1+2s)}$

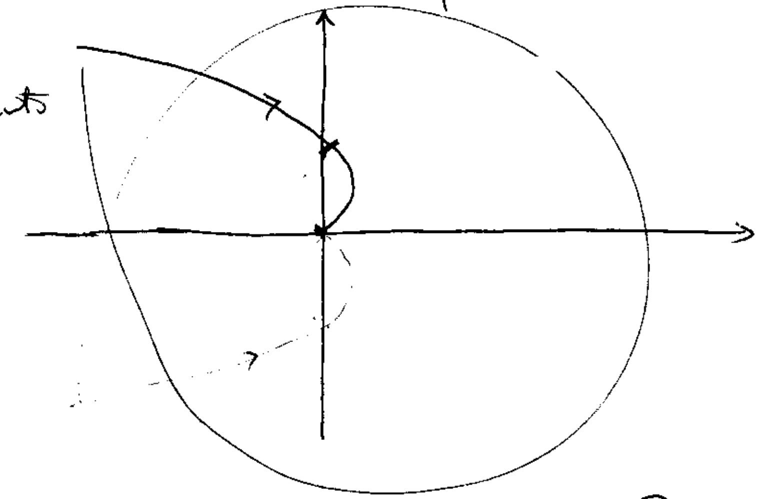
$$W(j\omega) = \frac{1-j\omega}{-\omega^2(1+2j\omega)} = \frac{(1-2\omega^2)-3j\omega}{-\omega^2(1+4\omega^2)}$$



$$Re = \frac{1-2\omega^2}{-\omega^2(1+4\omega^2)}$$

$$Im = +\frac{3}{\omega(1+4\omega^2)}$$

No asintoti perché c'è andamento parabolico.



$Im > 0 \quad \forall \omega$

$Re = 0 \iff \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$Im = +\dfrac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,3} = \sqrt{2}$

2) $K > 0 \iff -\frac{1}{k} < 0 \iff N = -2 \iff Z = P - N = 2 \qquad P = 0$

$k < 0 \iff -\frac{1}{k} > 0 \iff N = -1 \iff Z = 1$

3) $W(s) = K\dfrac{1-s}{1+2s}$

$a(s)+b(s) = 1+3k+s(4-3k)$ è stabile se $\boxed{0<k<\frac{4}{3}}$

$$F(s) = \frac{1+k_2W(s)}{1+k_1W(s)} = \frac{1+2s+2k(1-s)}{1+2s+k(1-s)} = \frac{1+2k+s(2-2k)}{1+k+s(2-k)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Dobbiamo verificare per quali valori di k la F(s) è positiva reale

$$Re\, F(j\omega) = Re\,\frac{(1+2k)+(2-2k)j\omega}{(1+k)+(2-k)j\omega} = \frac{(1+2k)(1+k)+(2-2k)(2-k)\omega^2}{(1+k)^2+(2-k)^2\omega^2} \geq 0$$

Il denominatore è >0 mentre il numeratore è ≥ 0 $\forall\omega \iff \begin{cases}(1+2k)(1+k)\geq 0\\(2-2k)(2-k)\geq 0\end{cases}$

Poiché $k>0$ l'unica condizione è $k\leq 1$ o $k\geq 2$

Insieme alla condizione di stabilità si ottiene $0<k\leq 1$

ES 2

Versione con modi e^{-t}, $e^{-t}\cos t$

In questo caso dobbiamo avere in catena chiusa poli in -1 e in $-1\pm j$

L'errore a regime nullo (in uscita alla rampa) impone di dover aggiungere un polo nell'origine. Quindi $C(s) = \frac{\bar{C}(s)}{s}$

Applichiamo lo schema diretto a $\frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s(s+3)}$

Perché $n=2$ allora $p(s)$ dovrà avere grado 3

e quindi $p(s) = (s+1)(s^2+2s+2) = s^3+3s^2+4s+2$

il sistema da risolvere diventa

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Versione con modi te^{-t}, $e^{-t}\cos t$

In questo caso dobbiamo imporre poli -1 (doppio) e in $-1\pm j$

$p(s)$ con grado 3 non è in grado di soddisfare tale vincolo.

Una soluzione è aggiungere un altro polo nell'origine nel controllore

$C(s) = \frac{\bar{C}(s)}{s^2}$ e quindi applicare lo schema diretto a

$\frac{G(s)}{s^2} = \frac{2}{s^2(s+3)}$ che porta a $n=3$ e $p(s)$ con grado 5

che può essere scelto $(s+1)^3(s^2+2s+2)$

$= s^5+5s^4+11s^3+13s^2+8s+2$

il sistema diventa

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \\ 13 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 13 \\ 11 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}$$

ES 4

$G(0) = 8\,db \Rightarrow G(0) = 2.5 = \frac{5}{2}$

$h_G = 0$ dobbiamo avere un polo nell'origine $h = 1$
e quindi dobbiamo aggiungere un polo nell'origine $h_c = 1$
$K_c = \frac{10}{5/2} = 4$ dove 10 è il guadagno di Bode complessivo

$\hat{W}(s) = \frac{4}{s} G(s)$ $|G(j4)|_{db} = 5\,db$ $\simeq 1.7$ $\angle G(j4) = -45°$

$|\hat{W}(j4)| = \frac{4}{|j4|} |G(j4)| = |G(j4)| = 1.7$ $c = \frac{1}{1.7} = 0.56 < 1$
attenuare

$\angle \hat{W}(j4) = -90° + \angle G(j4) = -135°$ $\Delta\varphi = 60 - (180 - 135) = 15° > 0$
anticipare

Serve una rete a sella