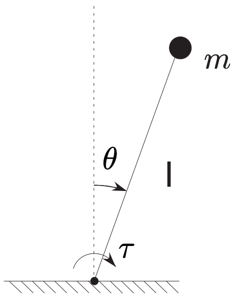
Bozza del I compitino 2004 - FAU

Esercizio 1A. Si consideri il seguente sistema meccanico



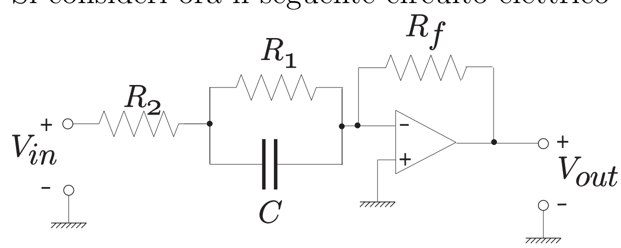
dove $l = 1$, l'asta del pendolo é supposta priva di massa, l'accelerazione di gravità vale $g = 10$ e $m = 1$. Sia θ l'angolo che l'asta forma con la verticale, e τ una coppia esterna applicata al fulcro del pendolo (vedi figura).

1. determinare l'equazione differenziale lineare ottenuta linearizzando il sistema nell'intorno di $\theta = 0$;

2. calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita θ;

3. calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita $\frac{d\theta}{dt}$ (velocità angolare).

Si consideri ora il seguente circuito elettrico



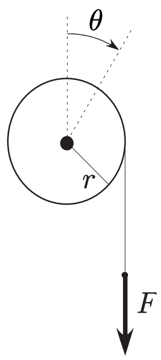
dove $C = 10^{-5}$, $R_2 = 10^5$, $R_f = 2 \times 10^5$.

1. supponendo l'operazionale ideale, determinare la funzione di trasferimento tra v_{in} e v_{out} in funzione della resistenza R_1;

2. determinate il valore di R_1 sapendo che la risposta impulsiva del sistema evidenzia il modo e^{-2t}.

Soluzione 1A. Si ha $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = mlgsin\theta + \tau$, dove $I = ml^2$, da cui linearizzando $\frac{d^2\theta}{dt^2} - 10\theta = \tau$. Si ha quindi $\frac{1}{s^2-10}$ per la prima funzione di trasferimento, e $\frac{s}{s^2-10}$ per la seconda. L'impedenza Z_1 vale $Z_1 = \frac{10^5+R_1+sR_1}{1+10^{-5}R_1 s}$, mentre $Z_2 = 2 \times 10^5$. Quindi $W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -2\frac{1+10^{-5}R_1 s}{1+10^{-5}R_1+10^{-5}R_1 s}$. La presenza del modo e^{-2t} impone che il denominatore si annulli per $s = -2$, da cui $R_1 = 10^5$.

Esercizio 1B. Si consideri il seguente sistema meccanico



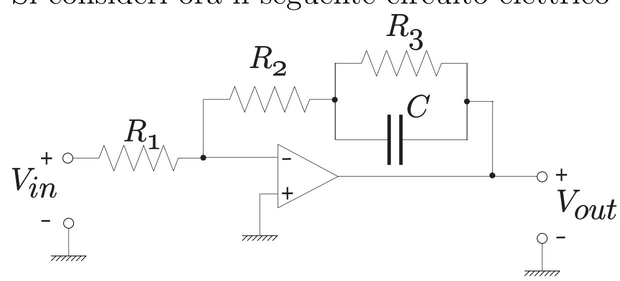
dove $r = 1$ é il raggio della ruota, avente momento d'inerzia $J = 2$, e la forza agente f é l'ingresso del sistema. La rotazione della puleggia sia inoltre ostacolata da una coppia d'attrito pari a $2\frac{d\theta}{dt}$.

1. determinare l'equazione differenziale che descrive il sistema;

2. calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso f e l'uscita θ;

3. calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso f e l'uscita $\frac{d\theta}{dt}$ (velocità angolare).

Si consideri ora il seguente circuito elettrico



dove $C = 10^{-5}$, $R_2 = 10^5$, $R_1 = 2 \times 10^5$.

1. supponendo l'operazionale ideale, determinare la funzione di trasferimento tra v_{in} e v_{out} in funzione della resistenza R_3;

2. determinare il valore di R_3 sapendo che la risposta impulsiva del sistema evidenzia il modo e^{-t}.

Soluzione 1B. Si ha $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = rf - 2\frac{d\theta}{dt}$, da cui $2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt} = f$. Si ha quindi $\frac{1}{2s(s+1)}$ per la prima funzione di trasferimento, e $\frac{1}{2(s+1)}$ per la seconda. L'impedenza Z_1 vale $Z_1 = 2 \times 10^5$, mentre $Z_2 = \frac{10^5+R_3+sR_3}{1+10^{-5}R_3 s}$. Quindi $W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{10^5+R_3+sR_3}{2(10^5+R_3 s)}$. La presenza del modo e^{-t} impone che il denominatore si annulli per $s = -1$, da cui $R_3 = 10^5$.

Esercizio 2A. Dato il modello ingresso-uscita

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1-2k)y = \frac{du}{dt} - ku$$

dove k é un parametro reale positivo, é richiesto di:

1. calcolare la risposta impulsiva per $k = \frac{5}{2}$;

2. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente per $k = 1$ al segnale di ingresso $u(t) = cos[t]$ (con condizioni iniziali nulle);

3. studiare la stabilitá interna (asintotica, rispetto alle condizioni iniziali) al variare di $k > 0$;

4. studiare la stabilitá BIBO al variare di $k > 0$.

Soluzione 2A. Per $k = \frac{5}{2}$ la funzione di trasferimento vale

$$W(s) = \frac{s - \frac{5}{2}}{s^2 - 4} = \frac{9}{8}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{8}\frac{1}{s-2}$$

che antitrasformata fornisce $w(t) = \frac{1}{8}[9e^{-2t} - e^{2t}]$. Per $k = 1$ la funzione di trasferimento vale

$$W(s) = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

che é BIBO stabile, per cui la risposta a regime esiste. Poiché $W(i) = \frac{1-i}{2}$, che ha modulo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed argomento $\frac{\pi}{4}$, si ha $y_{reg}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}cos[t - \frac{\pi}{4}]$. Se

$k \geq \frac{1}{2}$ abbiamo due radici caratteristiche reali ed opposte, quindi almeno una radice a parte reale non negativa, e quindi l'instabilitá. Se $0 < k < \frac{1}{2}$ abbiamo due radici immaginarie pure, ed ancora l'instabilitá. Quindi non si ha stabilitá interna per nessun valore di $k > 0$. Invece, solo per $k = 1$ si ha una cancellazione zero-polo che rende il sistema BIBO stabile (si veda il punto 2.). Quindi si ha stabilitá BIBO solo per $k = 1$.

Esercizio 2B. Dato il modello ingresso-uscita

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (k-1)y = \frac{du}{dt} - \frac{1}{2}u$$

dove k é un parametro reale positivo, é richiesto di:

1. calcolare la risposta impulsiva per $k = 1$;
2. calcolare, se esiste, la risposta a regime per $k = \frac{3}{4}$ al segnale di ingresso $u(t) = cos[\frac{t}{2}]$ (con condizioni iniziali nulle);
3. studiare la stabilitá interna (asintotica, rispetto alle condizioni iniziali) al variare di $k > 0$;
4. studiare la stabilitá BIBO al variare di $k > 0$.

Soluzione 2B. Per $k = 1$ la funzione di trasferimento vale

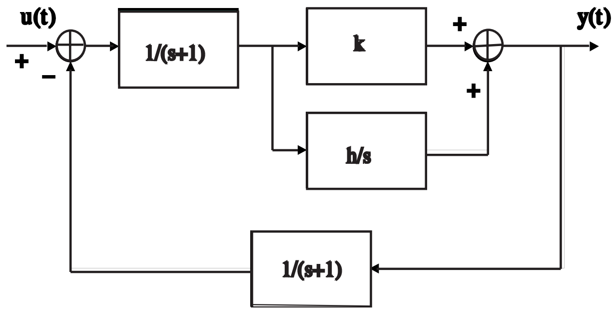
$$W(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$$

che antitrasformata fornisce $w(t) = 1 - \frac{1}{2}t$. Per $k = \frac{3}{4}$ la funzione di trasferimento vale

$$W(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s^2 - \frac{1}{4}} = \frac{s - \frac{1}{2}}{(s - \frac{1}{2})(s + \frac{1}{2})} = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

che é BIBO stabile, per cui la risposta a regime esiste. Poiché $W(i\frac{1}{2}) = 1 - i$, che ha modulo $\sqrt{2}$ ed argomento $\frac{\pi}{4}$, si ha $y_{reg}(t) = \sqrt{2}cos[\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}]$. Se $0 < k \leq 1$ abbiamo due radici caratteristiche reali ed opposte, quindi almeno una radice a parte reale non negativa, e quindi l'instabilitá. Se $k > 1$ abbiamo due radici immaginarie pure, ed ancora l'instabilitá. Quindi non si ha stabilitá interna per nessun valore di $k > 0$. Invece, solo per $k = \frac{3}{4}$ si ha una cancellazione zero-polo che rende il sistema BIBO stabile (si veda il punto 2.). Quindi si ha stabilitá BIBO solo per $k = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3A. Dato lo schema in figura



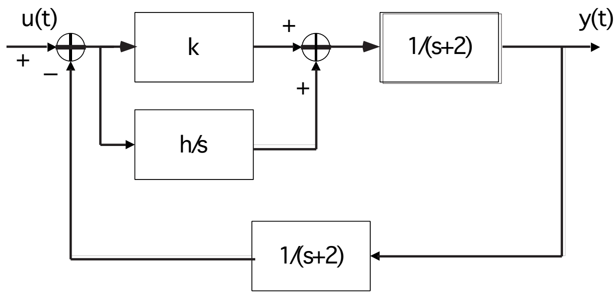
1. si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ tra $u(t)$ ed $y(t)$;
2. si studi la stabilitá di $W(s)$ al variare dei parametri reali h e k;
3. si calcoli il valore di h e k sapendo che 1 é un modo del sistema complessivo, e che $W(s)$ ammette due poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento $\xi = \frac{1}{2}$. Quanto vale la pulsazione ω_n in tal caso?

Soluzione 3A. Si trova $W(s) = \frac{(s+1)(ks+h)}{s^3+2s^2+(k+1)s+h}$. La tabella di Routh corrispondente é

$$
\begin{array}{c|cc}
- & - & - \\
 & 1 & k+1 \\
 & 2 & h \\
 & (k+1) - \frac{h}{2} & \\
 & h &
\end{array}
$$

da cui la condizione di stabilitá $2(k+1) > h > 0$ che, in particolare, impone $k > -1$. Imponendo che $s = 0$ annulli il denominatore di $W(s)$, sia $d(s)$, si trova facilmente $h = 0$. In tal caso risulta $d(s) = s(s^2 + 2s + k + 1)$. Il termine di secondo grado ha $\xi = \frac{1}{2}$ solo se $k = 3$, ed in tal caso si ha anche $\omega_n = 2$. Quindi $h = 0, k = 3$ e $\omega_n = 2$.

Esercizio 3B. Dato lo schema in figura



1. si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ tra $u(t)$ ed $y(t)$;
2. si studi la stabilitá di $W(s)$ al variare dei parametri reali h e k;
3. si calcoli il valore di h e k sapendo che e^{-t} é un modo del sistema complessivo, e che $W(s)$ ammette due poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento $\xi = \frac{1}{2}$. Quanto vale la pulsazione ω_n in tal caso?

Soluzione 3B. Si trova $W(s) = \frac{(s+2)(ks+h)}{s^3+4s^2+(k+4)s+h}$. La tabella di Routh corrispondente é

$$
\begin{array}{c|cc}
- & - & - \\
 & 1 & k+4 \\
 & 4 & h \\
 & (k+4)-\frac{h}{4} & \\
 & h &
\end{array}
$$

da cui la condizione di stabilitá $4(k+4) > h > 0$ che, in particolare, impone $k > -4$. Imponendo che $s = -1$ annulli il denominatore di $W(s)$, sia $d(s)$, si trova facilmente $h = k+1$. In tal caso risulta $d(s) = (s+1)(s^2+3s+k+1)$. Il termine di secondo grado ha $\xi = \frac{1}{2}$ solo se $k = 8$, ed in tal caso si ha anche $\omega_n = 3$. Quindi $h = 9, k = 8$ e $\omega_n = 3$.