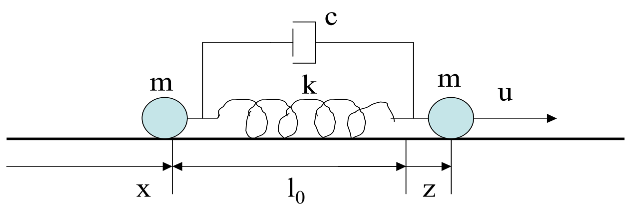
Primo Compitino di Fondamenti di Automatica del 14 maggio 2005 - Soluzioni

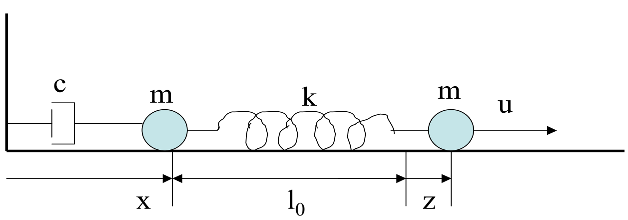
Esercizio 1A. Sia $x(t)$ la posizione della prima pallina, $z(t)$ lo scostamento della seconda pallina rispetto alla posizione di riposo l_0 della molla (supposta nulla, $l_0 = 0$, per semplicitá), $u(t)$ la forza agente (si veda la figura seguente), mentre $k > 0$, $c > 0$ e $m > 0$ sono rispettivamente la costante elastica della molla, la costante di smorzamento dello smorzatore e la massa della pallina.



É richiesto di:

- considerando come uscita $y(t) = x(t)$, scrivere un modello di stato;
- calcolare la funzione di trasferimento tra u e x;
- calcolare la funzione di trasferimento tra u e z;
- discutere la stabilitá BIBO delle due funzioni di trasferimento trovate.

Esercizio 1B. Sia $x(t)$ la posizione della prima pallina, $z(t)$ lo scostamento della seconda pallina rispetto alla posizione di riposo l_0 della molla (supposta nulla, $l_0 = 0$, per semplicitá), $u(t)$ la forza agente (si veda la figura seguente), mentre $k > 0$, $c > 0$ e $m > 0$ sono rispettivamente la costante elastica della molla, la costante di smorzamento dello smorzatore e la massa della pallina.



É richiesto di:

- considerando come uscita $y(t) = x(t)$, scrivere un modello di stato;
- calcolare la funzione di trasferimento tra u e x;
- calcolare la funzione di trasferimento tra u e z;
- discutere la stabilitá BIBO delle due funzioni di trasferimento trovate.

Soluzione. Si trova

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z, \; \frac{d^2z}{dt^2} = -2\frac{c}{m}\dot{z} - 2\frac{k}{m}z + \frac{1}{m}u,$$

e ponendo $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = z, x_4 = \dot{z}$ si arriva facilmente a

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\frac{k}{m} & -2\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \; H = [\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,], \; J = [\,0\,].$$

Dalle due equazioni del moto si ha

$$s^2X(s) = [\frac{k}{m} + \frac{c}{m}s]Z(s), \; [s^2 + 2\frac{c}{m}s + 2\frac{k}{m}]Z(s) = \frac{1}{m}U(s),$$

da cui le due funzioni di trasferimento seguenti:

$$\frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + 2\frac{c}{m}s + 2\frac{k}{m}}, \; \frac{k}{m^2}\frac{1 + \frac{c}{k}s}{s^2(s^2 + 2\frac{c}{m}s + 2\frac{k}{m})}.$$

La prima risulta stabile (con Routh), mentre l'altra instabile (causa la presenza di due poli nulli).

Nella versione B, si trova

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}z, \; \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{c}{m}\dot{x} - 2\frac{k}{m}z + \frac{1}{m}u,$$

e ponendo $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = z, x_4 = \dot{z}$ si arriva facilmente a

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c}{m} & -2\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \; H = [\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,], \; J = [\,0\,].$$

In maniera analoga si ricavano le due funzioni di trasferimento seguenti:

$$\frac{1}{m}\frac{s + \frac{c}{m}}{s^3 + \frac{c}{m}s^2 + 2\frac{k}{m}s + \frac{kc}{m^2}}, \; \frac{k}{m^2}\frac{1}{s[s^3 + \frac{c}{m}s^2 + 2\frac{k}{m}s + \frac{kc}{m^2}]}.$$

La prima risulta stabile (con Routh), mentre l'altra instabile (causa la presenza di un polo nullo).

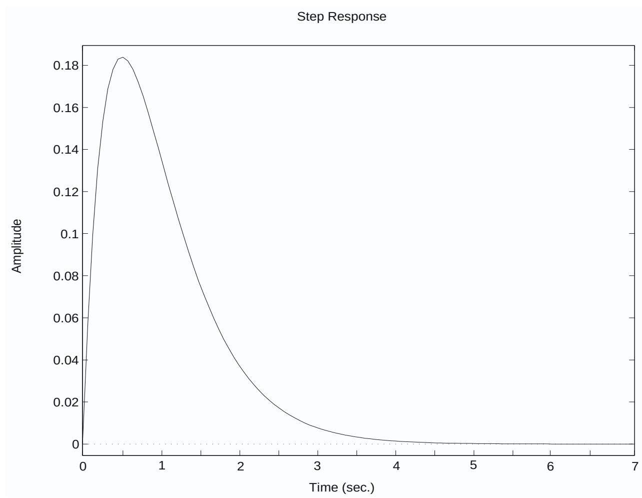
Esercizio 2A. Si consideri il sistema descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + ay(t) = \frac{d}{dt}u(t) + bu(t),$$

dove a, b sono parametri reali. É richiesto di:

- calcolare la risposta forzata al gradino unitario nell'ipotesi $a = 3$ e $b = 1$;

- determinare a e b sapendo che il sistema ammette la risposta libera $y_l(t) = te^{-2t}$ (per opportune condizioni iniziali) e che la risposta forzata al gradino unitario ha l'andamento illustrato nella seguente figura:



- studiare la stabilità BIBO del sistema al variare dei parametri a e b.

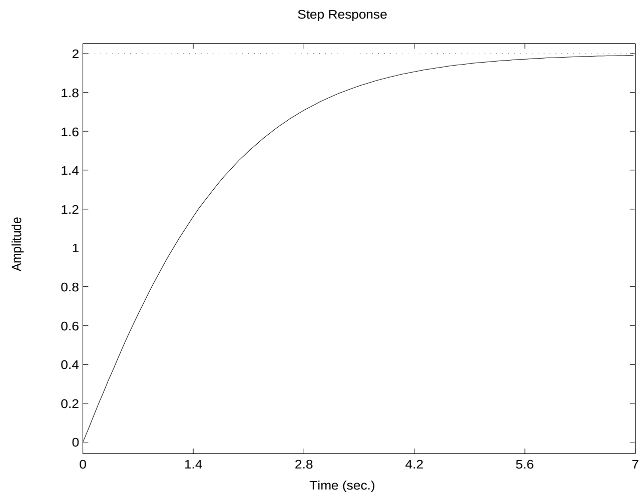
Esercizio 2B. Si consideri il sistema descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + ay(t) = \frac{d}{dt}u(t) + bu(t),$$

dove a, b sono parametri reali. É richiesto di:

- calcolare la risposta forzata al gradino unitario nell'ipotesi $a = 1$ e $b = 1$;

- determinare a e b sapendo che il sistema ammette la risposta libera $y_l(t) = te^{-t}$ (per opportune condizioni iniziali) e che la risposta forzata al gradino unitario ha l'andamento illustrato nella seguente figura:



- studiare la stabilità BIBO del sistema al variare dei parametri a e b.

Soluzione La funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = \frac{s+b}{s^2+4s+a}.$$

Se $a = 3$ e $b = 1$, avviene una semplificazione e la funzione di trasferimento del sistema diventa semplicemente

$$G(s) = \frac{1}{s+3}.$$

L'uscita corrispondente all'ingresso $U(s) = 1/s$ é quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+3} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}[1 - e^{-3t}].$$

La risposta libera implica che il denominatore $p(s) = s^2+4s+a$ debba avere una radice doppia in $s = -2$, cioé che sia $p(s) = (s+2)^2 = s^2+4s+4$, da cui $a = 4$. Dalla figura si deduce inoltre che il valore a regime della risposta al gradino è nullo, il che implica $G(0) = 0$ e quindi anche $b = 0$. In alternativa (piú complessa), appurato che il polo doppio é inevitabile ($a = 4$), si ha $W(s) = \frac{s+b}{(s+2)^2}$, da cui la risposta al gradino

$$Y(s) = \frac{s+b}{s(s+2)^2} = \frac{b}{4}\frac{1}{s} + (1-\frac{b}{2})\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{b}{4}\frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = \frac{b}{4} + (1-\frac{b}{2})te^{-2t} - \frac{b}{4}e^{-2t},$$

da cui uguagliando a zero la derivata rispetto al tempo, si ottiene $t = \frac{1}{2-b}$. Confrontando con il grafico (l'istante t del punto di massimo é posizionato circa in $t = 0.5$) si ricava ancora $b = 0$. Per la stabilitá, dobbiamo distinguere due casi:

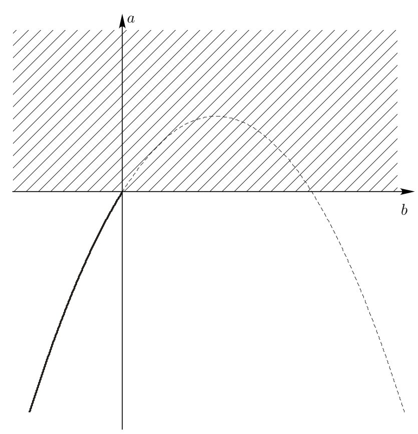
- ci sono cancellazioni zero-polo: questa situazione si verifica se e solo se il denominatore s^2+4s+a ha una radice in $-b$ (che è l'unica radice del numeratore). Ciò avviene se e solo se $(-b)^2+4(-b)+a=0$ e cioè se e solo se

$$a = b(4-b)$$

  In questo caso la funzione di trasferimento diventa $G(s) = \frac{1}{s+4-b}$ e si ha BIBO stabilità se e solo se $b < 4$;

- non ci sono cancellazioni zero-polo: questa situazione si verifica se e solo se $a \neq b(4-b)$. In tal caso per Routh si ha ha BIBO stabilità se e solo se $a > 0$.

La regione nel piano dei parametri in cui si ha BIBO stabilità è illustrata nella figura seguente ($a > 0$ oppure il ramo di parabola indicato se $a \leq 0$):



Nella versione B, la funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = \frac{s+b}{s^2+2s+a}.$$

Se $a = 1$ e $b = 1$, avviene una semplificazione e la funzione di trasferimento del sistema diventa semplicemente

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

L'uscita corrispondente all'ingresso $U(s) = 1/s$ é quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t}.$$

La risposta libera implica che il denominatore $p(s) = s^2 + 2s + a$ debba avere una radice doppia in $s = -1$, cioé che sia $p(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$, da cui $a = 1$. Dalla figura si deduce inoltre che il valore a regime della risposta al gradino è 2, il che implica $G(0) = 2$ e quindi anche $b = 2$. Per la stabilitá, dobbiamo distinguere due casi:

- ci sono cancellazioni zero-polo: questa situazione si verifica se e solo se il denominatore s^2+2s+a ha una radice in $-b$ (che è l'unica radice del numeratore). Ciò avviene se e solo se $(-b)^2 + 2(-b) + a = 0$ e cioè se e solo se

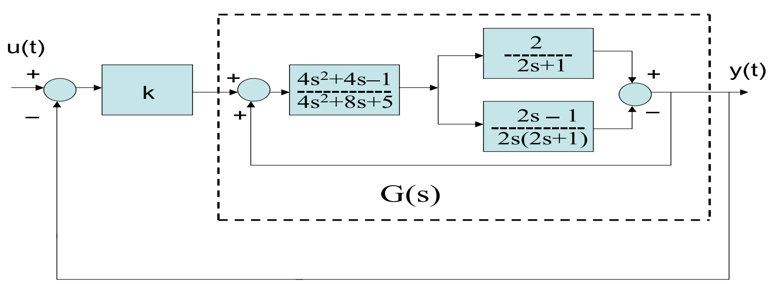
$$a = b(2-b)$$

  In questo caso la funzione di trasferimento diventa $G(s) = \frac{1}{s+2-b}$ e si ha BIBO stabilità se e solo se $b < 2$;

- non ci sono cancellazioni zero-polo: questa situazione si verifica se e solo se $a \neq b(2-b)$. In tal caso per Routh si ha ha BIBO stabilità se e solo se $a > 0$.

La regione nel piano dei parametri in cui si ha BIBO stabilità è del tutto simile a quella trovata nella versione A.

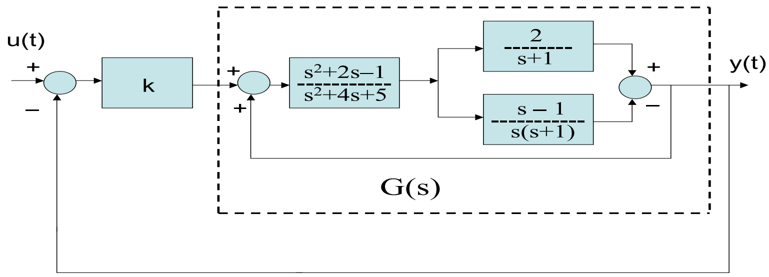
Esercizio 3A. Dato lo schema di figura



é richiesto di:

- calcolare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$, corrispondente alla connessione dei blocchi racchiusi nella linea tratteggiata di figura;
- studiare la stabilitá del sistema complessivo al variare di $k \in \mathbb{R}$ (con Routh), ed in particolare individuare il numero di poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare di k;
- trovare i valori di k per cui ci sono poli a parte reale nulla, ed in particolare per l'unico valore di k per cui esiste una coppia di poli immaginari puri distinti (cioé non nulli), trovare la risposta impulsiva del sistema complessivo.

Esercizio 3B. Dato lo schema di figura



é richiesto di:

- calcolare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$, corrispondente alla connessione dei blocchi racchiusi nella linea tratteggiata di figura;
- studiare la stabilitá del sistema complessivo al variare di $k \in \mathbb{R}$ (con Routh), ed in particolare individuare il numero di poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare di k;
- trovare i valori di k per cui ci sono poli a parte reale nulla, ed in particolare per l'unico valore di k per cui esiste una coppia di poli immaginari puri distinti (cioé non nulli), trovare la risposta impulsiva del sistema complessivo.

Soluzione. Il calcolo di $G(s)$ porge facilmente $G(s) = \frac{4s^2+4s-1}{(2s+1)^3}$, e la tabella di Routh per lo schema in retroazione unitaria con $kG(s)$ porge

$$
\left|\begin{array}{cc}
8 & 2(3+2k) \\
4(3+k) & 1-k \\
\frac{4(k+1)(k+4)}{k+3} & \\
1-k &
\end{array}\right.
$$

da cui un'analisi dei segni mostra che

- per $k > 1$, un polo instabile
- per $-1 < k < 1$ stabilitá (e quindi per $k = 1$ un polo immaginario, quindi nullo)
- per $k < -1$ due poli instabili (e quindi per $k = -1$ due poli immaginari puri distinti, oppure un polo doppio nullo)
- nulla di particolare succede invece per $k = -3, -4$ (sempre due poli instabili)

Per $k = 1$ il denominatore é $2s(4s^2 + 8s + 5)$ (polo nullo), mentre per $k = -1$ la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva diventano

$$W(s)=\frac{-4s^2-4s+1}{8(s+1)(s^2+\frac{1}{4})}=\frac{1}{10}[\frac{1}{s+1}+2\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}-\frac{6s}{s^2+\frac{1}{4}}]\Rightarrow w(t)=\frac{1}{10}[2sin(\frac{t}{2})-6cos(\frac{t}{2})+e^{-t}]$$

Nella versione B, il calcolo di $G(s)$ porge facilmente $G(s)=\frac{s^2+2s-1}{(s+1)^3}$, e la tabella di Routh per lo schema in retroazione unitaria con $kG(s)$ porge

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3+2k \\ 3+k & 1-k \\ \frac{2(k+1)(k+4)}{k+3} & \\ 1-k & \end{array}\right.$$

da cui un'analisi dei segni mostra che

- per $k>1$, un polo instabile
- per $-1<k<1$ stabilitá (e quindi per $k=1$ un polo immaginario, quindi nullo)
- per $k<-1$ due poli instabili (e quindi per $k=-1$ due poli immaginari puri distinti, oppure un polo doppio nullo)
- nulla di particolare succede invece per $k=-3,-4$ (sempre due poli instabili)

Per $k=1$ il denominatore é $s(s^2+4s+5)$ (polo nullo), mentre per $k=-1$ la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva diventano

$$W(s)=\frac{-s^2-2s+1}{(s+2)(s^2+1)}=\frac{1}{5}[\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s^2+1}-\frac{6s}{s^2+1}]\Rightarrow w(t)=\frac{1}{5}[2sin(t)-6cos(t)+e^{-2t}]$$