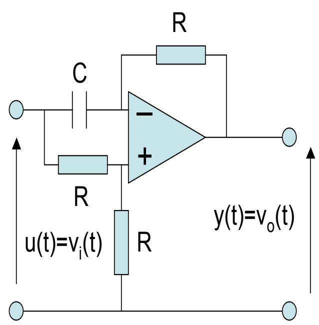
## FAU - I compito e II compitino - Giugno 2005 - Versione A

**Esercizio 1A. (solo compito)** Si consideri lo schema di figura (con $RC = 1$). É richiesto di:




- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi di operazionale ideale;
- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi che l'operazionale sia caratterizzato dalla relazione $V_o(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{k}{(s+2)^2}$;
- studiare, al variare del parametro reale $k$, la stabilitá dello schema elettrico, in particolare evidenziando, qualora non ci sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di quelli a parte reale nulla;
- determinare i modi del sistema qualora siano presenti poli a parte reale nulla.

**Esercizio 2A.** Data $G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+\frac{13}{5})}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k > 0$, evidenziando asintoti e punti doppi;
- determinare il valore del terzo polo, in tutti i casi in cui é presente un polo doppio;
- studiare la stabilitá al variare di $k > 0$, utilizzando solo il luogo delle radici. In particolare evidenziare, in presenza di stabilitá, quando la risposta al gradino contiene modi oscillatori.

**Esercizio 3A.** Data $G(s) = \frac{(1+s)^2}{s(1-s)^2}$, é richiesto di:

- disegnare il diagramma di Bode;
- disegnare il diagramma di Nyquist, evidenziandone asintoti, intersezioni con gli assi e con il cerchio unitario;
- studiare la stabilitá al variare di $k$ reale, per la funzione di trasferimento $kG(s)$ connessa in retroazione unitaria, ricorrendo solo a Nyquist ed evidenziando, quando non vi sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di poli a parte reale nulla.

**Esercizio 4A.** Data $G(s) = \frac{1}{s+1}$, si vuole progettare una rete compensatrice, $C_1(s)$, che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa unitaria pari a $\frac{1}{100}$ ;
- margine di fase pari a circa $45^o$;
- pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c^{(1)} = 10$.

É richiesto di:

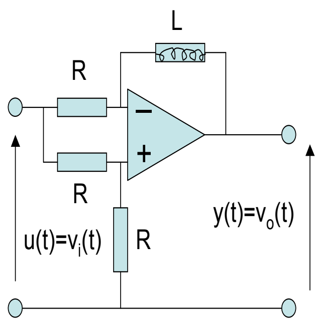
- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_1(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_1(s)$.

Supponendo ora, mantenendo inalterate le altre specifiche, di voler ottenere una diversa $\omega_c$, pari a $\omega_c^{(2)} = 1$, ricorrendo ad un diverso compensatore $C_2(s)$, é richiesto di:

- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_2(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_2(s)$.

## FAU - I compito e II compitino - Giugno 2005 - Versione B

**Esercizio 1B. (solo compito)** Si consideri lo schema di figura (con $L/R = 1$). É richiesto di:




- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi di operazionale ideale;
- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi che l'operazionale sia caratterizzato dalla relazione $V_o(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{k}{(s+2)^2}$;
- studiare, al variare del parametro reale $k$, la stabilitá dello schema elettrico, in particolare evidenziando, qualora non ci sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di quelli a parte reale nulla;
- determinare i modi del sistema qualora siano presenti poli a parte reale nulla.

**Esercizio 2B.** Data $G(s) = \frac{s-2}{(s+2)^2(s+\frac{26}{5})}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k > 0$, evidenziando asintoti e punti doppi;
- determinare il valore del terzo polo, in tutti i casi in cui é presente un polo doppio;
- studiare la stabilitá al variare di $k > 0$, utilizzando solo il luogo delle radici. In particolare evidenziare, in presenza di stabilitá, quando la risposta al gradino contiene modi oscillatori.

**Esercizio 3B.** Data $G(s) = \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$, é richiesto di:

- disegnare il diagramma di Bode;
- disegnare il diagramma di Nyquist, evidenziandone asintoti, intersezioni con gli assi e con il cerchio unitario;
- studiare la stabilitá al variare di $k$ reale, per la funzione di trasferimento $kG(s)$ connessa in retroazione unitaria, ricorrendo solo a Nyquist ed evidenziando, quando non vi sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di poli a parte reale nulla.

**Esercizio 4B.** Data $G(s) = \frac{1}{10s+1}$, si vuole progettare una rete compensatrice, $C_1(s)$, che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa unitaria pari a $\frac{1}{1000}$ ;
- margine di fase pari a circa $45^o$;
- pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c^{(1)} = 10$.

É richiesto di:

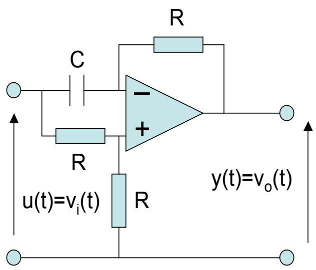
- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_1(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_1(s)$.

Supponendo ora, mantenendo inalterate le altre specifiche, di voler ottenere una diversa $\omega_c$, pari a $\omega_c^{(2)} = 0.1$, ricorrendo ad un diverso compensatore $C_2(s)$, é richiesto di:

- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_2(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_2(s)$.

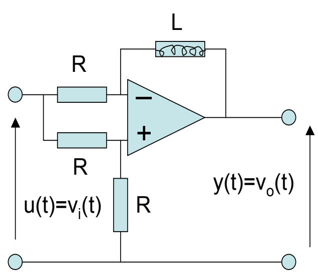
## Soluzioni - Giugno 2005 - FAU

**Esercizio 1A.** Si consideri lo schema di figura (con $RC = 1$). É richiesto di:




- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi di operazionale ideale;
- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi che l'operazionale sia caratterizzato dalla relazione $V_o(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{k}{(s+2)^2}$;
- studiare, al variare del parametro reale $k$, la stabilitá dello schema elettrico, in particolare evidenziando, qualora non ci sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di quelli a parte reale nulla;
- determinare i modi del sistema qualora siano presenti poli a parte reale nulla.

**Esercizio 1B.** Si consideri lo schema di figura (con $L/R = 1$). É richiesto di:




- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi di operazionale ideale;
- calcolare la funzione di trasferimento nell'ipotesi che l'operazionale sia caratterizzato dalla relazione $V_o(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{k}{(s+2)^2}$;
- studiare, al variare del parametro reale $k$, la stabilitá dello schema elettrico, in particolare evidenziando, qualora non ci sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di quelli a parte reale nulla;
- determinare i modi del sistema qualora siano presenti poli a parte reale nulla.

Si possono scrivere le equazioni

$$V_-(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{sCR}}U(s) + \frac{1}{1+sCR}Y(s),\ V_+(s) = \frac{1}{2}U(s)$$

dalle quali, ponendo $v_+(t) = v_-(t)$ si ricava facilmente la FDT nel caso ideale:

$$W_{id}(s) = \frac{1-s}{2}$$

mentre, detta $G(s)$ la FDT dell'OP-AMP reale, ponendo $Y(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, si ricava che la FDT reale si puó esprimere come $W_{id}(s)$ in serie con la connessione in retroazione unitaria negativa di $\frac{G(s)}{1+sCR}$. Un semplice calcolo conduce a

$$W_{reale}(s) = \frac{k(1-s)}{2[(s+1)(s+2)^2+k]}$$

da cui il denominatore $p(s) = 2[s^3+5s^2+8s+(4+k)]$, che con Routh fornisce

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 5 & 4+k \\ \frac{1}{5}(36-k) & \\ 4+k & \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -4 & & 36 & \\ + & | & + & | & + \\ + & | & + & | & + \\ + & | & + & | & - \\ - & | & + & | & + \end{array}$$

che implica un polo a parte reale positiva per $k < -4$, stabilitá per $-4 < k < 36$, due poli a parte reale positiva per $k > 36$. Per $k = -4$ si ha un polo nullo e due stabili, con $p(s) = 2s[s^2+5s+8]$, cui corrispondono i modi $1, e^{-\frac{5}{2}t}cos[\frac{\sqrt{7}}{2}t], e^{-\frac{5}{2}t}sin[\frac{\sqrt{7}}{2}t]$, per $k = 36$ il polinomio fattorizza come $2(s+5)(s^2+8)$, cui corrispondono i modi $cos[2\sqrt{2}t], sin[2\sqrt{2}t], e^{-5t}$, e si hanno due poli immaginari distinti ed un polo negativo.

Per la **versione B**, conti assolutamente analoghi conducono agli identici risultati. Infatti le uniche differenze risiedono nelle equazioni

$$V_-(s) = \frac{1}{1+\frac{R}{sL}}U(s) + \frac{1}{1+\frac{sL}{R}}Y(s)$$

e sulla funzione da retroazionare, che é ora

$$\frac{G(s)}{(1+\frac{sL}{R})}$$

che conducono peró agli stessi risultati numerici.

**Esercizio 2A.** Data $G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+\frac{13}{5})}$, é richiesto di:

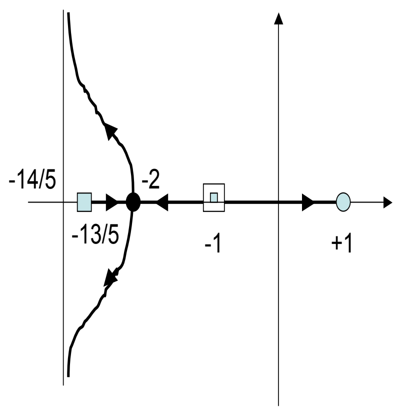
- disegnare il luogo delle radici per $k > 0$, evidenziando asintoti e punti doppi;
- determinare il valore del terzo polo, in tutti i casi in cui é presente un polo doppio;

- studiare la stabilitá al variare di $k > 0$, utilizzando solo il luogo delle radici. In particolare evidenziare, in presenza di stabilitá, quando la risposta al gradino contiene modi oscillatori.

**Esercizio 2B.** Data $G(s) = \frac{s-2}{(s+2)^2(s+\frac{26}{5})}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k > 0$, evidenziando asintoti e punti doppi;
- determinare il valore del terzo polo, in tutti i casi in cui é presente un polo doppio;
- studiare la stabilitá al variare di $k > 0$, utilizzando solo il luogo delle radici. In particolare evidenziare, in presenza di stabilitá, quando la risposta al gradino contiene modi oscillatori.

Si trovano tre punti doppi, $-1$ (il punto di partenza, quindi per $k = 0$), $-2$ (per $k = \frac{1}{5}$) e $\frac{11}{5}$ (non accettabile, $k < 0$). L'asintoto ha centro $-\frac{14}{5}$, da cui l'andamento di figura.




Per $k = 0$, oltre a $-1, -1$ si trova $p = -\frac{13}{5}$ (i tre poli di partenza), per $k = \frac{1}{5}$, oltre a $-2, -2$ si trova $p = -\frac{3}{5}$. Il valore $k_{cr}$ tale che il sistema é stabile per $0 \leq k < k_{cr}$ si individua dal passaggio del luogo per l'origine (asse immaginario). Poiché $s = 0$ implica $k_{cr} = \frac{13}{5}$, che é superiore a $k = \frac{1}{5}$ del polo doppio in $-2$, i tre poli saranno uno in $p = 0$, e gli altri stabili ma complessi coniugati. Quindi per $\frac{1}{5} < k < \frac{13}{5}$ si ha stabilitá con modi oscillatori nella risposta al gradino.

Per la **versione B**, i punti $s$ sono gli stessi moltiplicati per 2 (asintoti, punti doppi, ecc.), mentre i valori di $k$ sono moltiplicati per 4. La forma stessa del luogo é identica (amplificata di un fattore 2).

**Esercizio 3A.** Data $G(s) = \frac{(1+s)^2}{s(1-s)^2}$, é richiesto di:

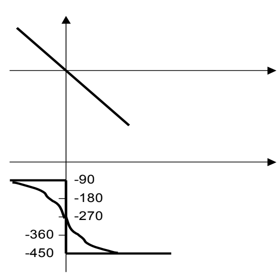
- disegnare il diagramma di Bode;

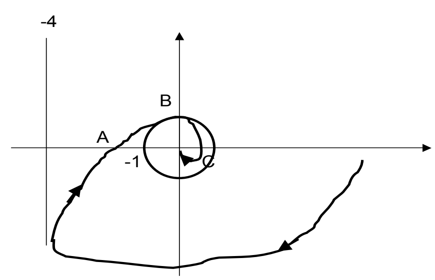
- disegnare il diagramma di Nyquist, evidenziandone asintoti, intersezioni con gli assi e con il cerchio unitario;
- studiare la stabilitá al variare di $k$ reale, per la funzione di trasferimento $kG(s)$ connessa in retroazione unitaria, ricorrendo solo a Nyquist ed evidenziando, quando non vi sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di poli a parte reale nulla.

**Esercizio 3B.** Data $G(s) = \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$, é richiesto di:

- disegnare il diagramma di Bode;
- disegnare il diagramma di Nyquist, evidenziandone asintoti, intersezioni con gli assi e con il cerchio unitario;
- studiare la stabilitá al variare di $k$ reale, per la funzione di trasferimento $kG(s)$ connessa in retroazione unitaria, ricorrendo solo a Nyquist ed evidenziando, quando non vi sia stabilitá, il numero di poli a parte reale positiva ed il numero di poli a parte reale nulla.

Il diagramma di Bode e quello di Nyquist risultano, per la **versione B**:



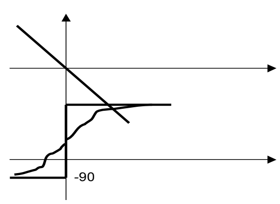

Infatti si ha $G(s)\tilde{=}\frac{1}{s}(1-4s)$, per $s$ piccolo, da cui $G(i\omega)\tilde{=}-4-\frac{i}{\omega}$. L'asintoto é verticale e centrato in $-4$. L'intersezione con l'asse $y$ si ha banalmente per $\omega = 1$ e vale 1 (entra nel cerchio unitario, punto $B$), in quanto c'é modulo unitario e $90^o$ di fase (vedi Bode). Per l'asse $x$, basta imporre che $(1-i\omega)^4$ sia puramente immaginario, da cui $(1-\omega^2)^2 - 4\omega^2 = 0$, cioé $\omega^2 \pm 2\omega - 1 = 0$, che porge, essendo $\omega > 0$, le due soluzioni

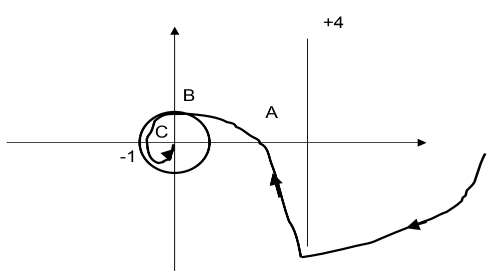
$\omega = \sqrt{2} - 1$ (punto $A$) e $\omega = \sqrt{2} + 1$ (punto $C$). Essendo $|G(i\omega)| = \frac{1}{\omega}$, é facile stabilire il valore dei punti $A$ e $C$:

$$A = -(1 + \sqrt{2}), \;\; C = \sqrt{2} - 1.$$

Per $k \geq 0$, tenendo in considerazione il "cerchio all'infinito", é immediato rendersi conto che tutto dipende dalla posizione del punto $A$. Se questi é a sinistra del punto $-1$ il diagramma completo compie $-2$ giri e da $G_+ = 0$ segue $W_+ = 2$, cioé l'instabilitá con due poli a parte reale positiva, mentre se é a destra il diagramma non compie alcun giro, garantendo la stabilitá. Se $0 < k < \sqrt{2} - 1$ siamo nella situazione di stabilitá, se $k \geq \sqrt{2} - 1$ di instabilitá (per $k = \sqrt{2} - 1$ si ha passaggio per $-1$ e quindi due poli a parte reale nulla, oltre ad uno stabile), come pure se $k = 0$ di instabilitá (polo nell'origine e due poli a parte reale negativa). Per $k < 0$, "rovesciando" Nyquist, si scopre comunque l'instabilitá (con uno o tre poli instabili). Tutto dipende ora dal punto $C$. Quindi per $0 > k > -(\sqrt{2} + 1)$ si ha un polo a parte reale positiva, per $k < -(\sqrt{2} + 1)$ tre poli a parte reale positiva, per $k = -(\sqrt{2} + 1)$ un polo a parte reale positiva e due immaginari puri.

Per la **versione A**, l'andamento "rovesciato della fase porge a risultati simili. Asintoto in $+4$, stessi valori di $\omega$ per le intersezioni con gli assi, e valori di $A$ e $C$ identici a parte il segno, mentre $B$ é lo stesso. Il diagramma di Bode e di Nyquist risultano ora:




ed il fatto che ora $G_+ = 2$ modifica la formula di conteggio di $W_+$. Un'analisi del tutto simile alla versione precedente conduce alle seguenti conclusioni: due poli a parte reale positiva ed uno a parte reale negativa per $0 < k < \sqrt{2} + 1$, e stabilitá per $k > \sqrt{2} + 1$, mentre per $k = 0$ un polo nullo e due a parte reale positiva, oltre a due poli a parte reale nulla ed uno a parte reale negativa per $k = \sqrt{2} + 1$. Per $k < 0$ si hanno invece tre poli a parte reale positiva per $0 > k > 1 - \sqrt{2}$, uno a parte reale positiva e due a parte reale negativa per $k < 1 - \sqrt{2}$, ed infine due a parte reale nulla ed uno a parte reale positiva per $k = 1 - \sqrt{2}$. Si noti, a differenza della versione precedente, che qui nei vari casi i giri attorno $-1$ sono talvolta orari, talvolta antiorari.

**Esercizio 4A.** Data $G(s) = \frac{1}{s+1}$, si vuole progettare una rete compensatrice, $C_1(s)$, che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa unitaria pari a $\frac{1}{100}$ ;
- margine di fase pari a circa $45^o$;
- pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c^{(1)} = 10$.

É richiesto di:

- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_1(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_1(s)$.

Supponendo ora, mantenendo inalterate le altre specifiche, di voler ottenere una diversa $\omega_c$, pari a $\omega_c^{(2)} = 1$, ricorrendo ad un diverso compensatore $C_2(s)$, é richiesto di:

- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_2(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_2(s)$.

**Esercizio 4B.** Data $G(s) = \frac{1}{10s+1}$, si vuole progettare una rete compensatrice, $C_1(s)$, che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- errore a regime alla rampa unitaria pari a $\frac{1}{1000}$ ;
- margine di fase pari a circa $45^o$;
- pulsazione di attraversamento pari a $\omega_c^{(1)} = 10$.

É richiesto di:

- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_1(s)$ é necessario ricorrere;
- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_1(s)$.

Supponendo ora, mantenendo inalterate le altre specifiche, di voler ottenere una diversa $\omega_c$, pari a $\omega_c^{(2)} = 0.1$, ricorrendo ad un diverso compensatore $C_2(s)$, é richiesto di:

- motivando adeguatamente la risposta, spiegare a che tipo di rete $C_2(s)$ é necessario ricorrere;

- **facoltativo:** calcolare un possibile controllore $C_2(s)$.

Chiaramente é richiesto il tipo 1 ed un guadagno di 100, da cui

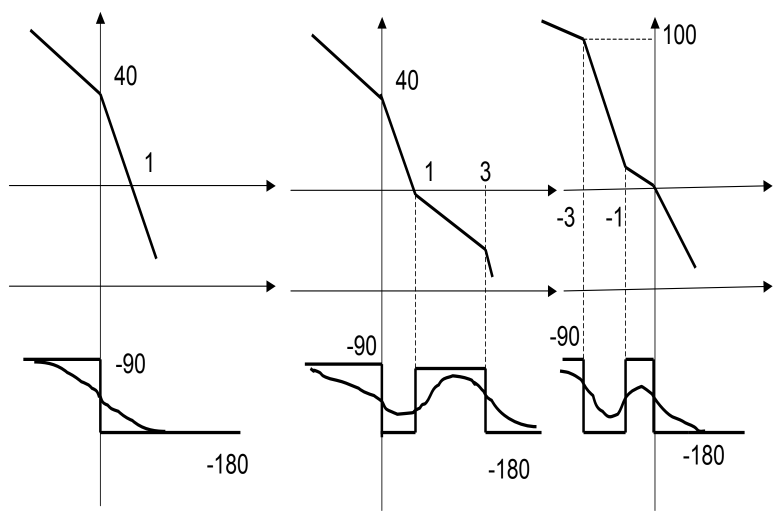
$$C^{(1)}(s) = \frac{100}{s}$$

Da Bode (vedi figura) per $C^{(1)}(s)G(s) = \frac{100}{s(s+1)}$, si vede che l'attraversamento si ha per $\omega = 10$. Per il primo quesito basta una rete anticipatrice per migliorare il margine di fase, ad esempio (vedi figura)

$$C_1(s) = \frac{100(1+\frac{s}{10})}{s(1+\frac{s}{1000})}$$

Invece per il secondo occorre abbassare il guadagno con una rete ritardatrice, ad esempio (vedi figura)

$$C_2(s) = \frac{100(1+10s)}{s(1+1000s)}$$




Per la **versione B**, cambia solo il fattore di guadagno 100 che diventa 1000, ed i relativi compensatori risultano, ad esempio

$$C_1(s) = \frac{1000(1+\frac{s}{10})}{s(1+\frac{s}{1000})},\ C_2(s) = \frac{1000(1+100s)}{s(1+10^6 s)}$$