**Prova Scritta di Controlli Automatici del 13.7.2001**

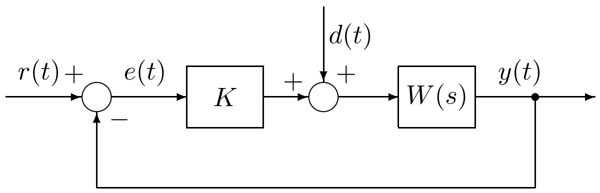
Prof. Zampieri

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ______________

*Non è ammessa la consultazione di libri, dispense, quaderni. Non si può usare la calcolatrice programmabile. Ogni risposta va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.*

**Esercizio-1 [8 pt]**

Si consideri lo schema




$$W(s) = \frac{-2s + a}{s^2 + s + 4},$$

con $K \geq 0$ e $a \geq 0$.

1. Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento a catena chiusa da $r$ a $y$. Si calcoli la funzione di sensibilità $S_a^T$ di $T(s)$ al variare del parametro $a$.
2. Si supponga inizialmente che il controllo sia spento (cioe' $K = 0$). Calcolare il valore di $a$ sapendo che in corrispondenza ad un disturbo $d(t) = 2\sin(2t)$ si ha un uscita a regime $y(t)$ sinusoidale di ampiezza 5.
3. Supponiamo che nominalmente $a$ abbia il valore calcolato nel punto 2, ma che vari entro una fascia di $\pm 10\%$, Si determini per quali valori di $K > 0$ il guadagno in continua da $r$ a $y$ è compreso entro il $\pm 8\%$ del suo valore nominale.
4. Supponiamo che nominalmente $a$ abbia il valore calcolato nel punto 2 e che $r(t) = 2$ e $d(t) = 1$. Calcolare l'andamento a regime di $e(t)$ al variare di $K$ e determinare i valori di $K$ in corrispondenza tale andamento è compreso entro una fascia di ampiezza $1/2$.

**Esercizio-2 [4 pt]**

Si consideri un sistema avente risposta impulsiva

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq T \\ e^{-3(t-T)} & \text{if } t \geq T \end{cases}$$

dove $T \geq 0$.

1. Dire se il sistema è BIBO stabile e determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.
2. Si supponga che il sistema sia inserito nello schema precedente dove $K = 5$. Determinare i valori di $T \geq 0$ tali che il sistema in catena chiusa è stabile.

**Esercizio-3 [6 pt]**

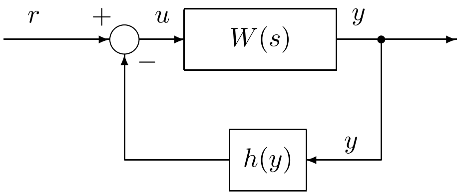
Si consideri lo schema precedente dove

$$W(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s - 1)}.$$

1. Tracciate il luogo dei poli della funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di $K \geq 0$ (calcolate eventuali asintoti, punti doppi e gli angoli di uscita dagli zeri).
2. Tracciate il luogo dei poli della funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di $K \leq 0$ (calcolate eventuali asintoti, punti doppi e gli angoli di uscita dagli zeri).
3. Determinare per quali valori di $K \geq 0$ il sistema a catena chiusa ha un polo nell'origine e per quali valori di $K \geq 0$ il sistema a catena chiusa poli con parte reale $\leq \frac{1}{2}$

**Esercizio-4 [8pt]**

Si consideri lo schema




dove

$$W(s) = \frac{s^2+1}{s(2s+1)}$$

1. Tracciate il diagramma di Bode di $W(s)$ e il diagramma di Nyquist di $W(s)$ (determinando le eventuali intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti).
2. Si supponga che $h(y) = Ky$. Impiegando il criterio di Nyquist, determinare il numero di poli instabili del sistema a catena chiusa al variare di $K$.
3. Si supponga che $h(y)$ sia una funzione dispari tale che

$$h(y) = K\frac{y}{y+1}, \qquad y \geq 0.$$

Impiegando il criterio del cerchio, determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile.

**Esercizio-5 [4pt]**

Si consideri un sistema avente funzione di trasferimento

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+5)}.$$

Attraverso il metodo di sintesi di Bode si progetti un compensatore in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche

a) Errore a regime massimo in risposta alla rampa parabolica pari a 0.1;

b) Frequenza di attraversamento $\omega_A = 5$ rad/sec.

c) Margine di fase $m_\varphi = 15^o$.

Si richiede di determinare il tipo di rete compensatrice (ritardatrice, anticipatrice, a sella) riportandone la funzione di trasferimento senza calcolarne esplicitamente i parametri.

# $\boxed{\text{ES. 1}}$

1) $T(s) = \dfrac{kW}{1+kW} = \dfrac{-2s+a}{s^2+s+4+k(-2s+a)}$

$S_a^W = \dfrac{a}{W}\dfrac{dW}{da} = a\,\dfrac{\cancel{s^2+s+4}}{-2s+a}\,\dfrac{1}{\cancel{s^2+s+4}} = \dfrac{a}{-2s+a}$

$S_a^T = \dfrac{1}{1+kW}\,S_a^W = \dfrac{s^2+s+4}{s^2+s+4+k(-2s+a)}\,\dfrac{a}{-2s+a}$

2) $y(t) = |W(2j)|\,2\sin(2t+\angle W(2j))$

$2|W(2j)| = 5 \qquad 4|W(2j)|^2 = 25$

$4\,\dfrac{|-4j+a|^2}{|\cancel{-4}+2j+\cancel{4}|^2} = 25$

$\cancel{4}\,\dfrac{a^2+16}{\cancel{4}} = 25 \Rightarrow \qquad a^2 = 25-16 = 9 \quad \Rightarrow a = \pm 3$

$a = 3$ perché $a \geq 0$

3) Stabilità: Denominatore $= s^2+(1-2k)s+(4+ka)$

è stabile (Cartesio) $\Leftrightarrow$ $1-2k>0 \Leftrightarrow k<1/2$
$4+ka>0$ sempre perché $k\geq 0$ $a\geq 0$

Stabilità per $\boxed{0\leq k<1/2}$

continua

$\dfrac{\Delta T}{T} = S_a^T\,\dfrac{\Delta a}{a} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{8}{100} \geq S_a^T(0)\,\dfrac{10}{100} \Rightarrow 8 \geq \dfrac{4}{4+3k}\,10^5$

$4+3k \geq 5 \Rightarrow k \geq 1/3 \Rightarrow \dfrac{1}{3}\leq k < \dfrac{1}{2}$

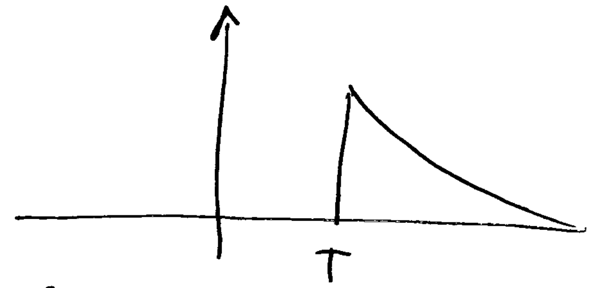
4) Quando si ha stabilità, i limiti esistono e si può applicare teorema valore finale

$E(s) = T_{re}(s)R(s) + T_{de}(s)D(s) = \dfrac{s^2+s+4}{s^2+s+4+k(-2s+3)}\,\dfrac{2}{s} + \dfrac{-(-2s+3)}{s^2+s+4+k(-2s+3)}\,\dfrac{1}{s}$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0^+} sE(s) = \dfrac{8}{4+3k} - \dfrac{3}{4+3k} = \dfrac{5}{4+3k}$

$\left|\dfrac{5}{4+3k}\right| < 1/2 \overset{k\geq 0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{5}{4+3k} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 10 < 4+3k \Leftrightarrow k>2 \Rightarrow$ MAI perché per tali $K$ il sistema è <u>INSTABILE</u>

# ES.2



1. È BIBO stabile
perché $w(t)$ è $L^1$ (assolutamente integrabile) $\forall T$.

$$W(s) = \frac{e^{-sT}}{s+3} \qquad \text{perché} \quad \mathcal{L}\left(\delta^{(-1)}(t)\, e^{-3t}\right) = \frac{1}{s+3}$$

2. Usiamo il risultato secondo cui il sistema retroazionato è stabile se e solo se (perché il sistema è stabile e si usa il criterio di Nyquist)

$$T \leq \frac{m_\varphi}{\omega_A}$$

dove $\omega_A$ pulsazione di attraversamento e $m_\varphi$ è il margine di fase di $k\,W(s)$.

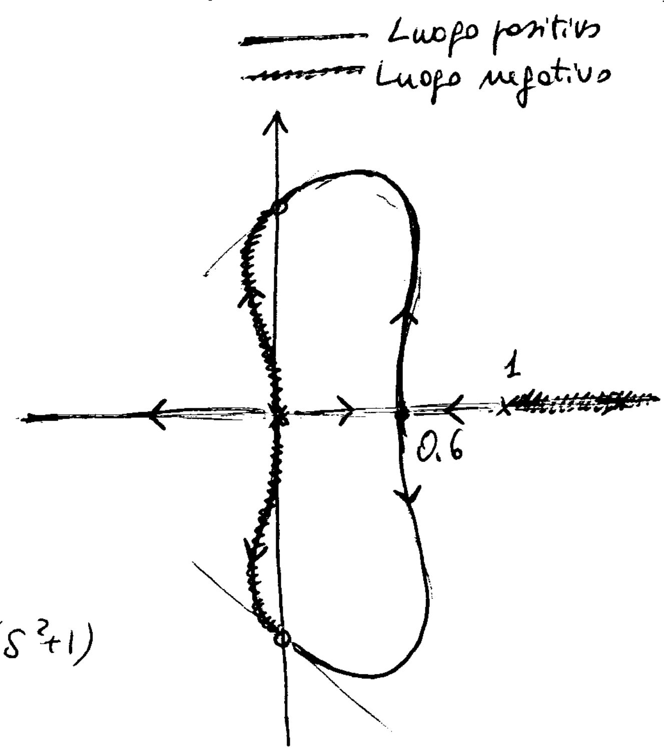
$$|k\,W(j\omega_A)|^2 = 1 \qquad \frac{25}{9+\omega_A^2} = 1 \qquad \omega_A^2 = 16 \qquad \omega_A = 4$$

$$m_\varphi = \pi + \angle W(j\omega_A) = \pi - \operatorname{artg} \frac{4}{3} = 2.2$$

$$T \leq \frac{2.2}{4} = 0.55$$

## ES 3

$$s^2(s-1)+k(s^2+1)=0$$




punti doppi

$$\begin{cases} 2s(s-1)+s^2+k\,2s=0 \\ s^2(s-1)+k(s^2+1)=0 \end{cases}$$

$$K=-\frac{\cancel{s}(2s-2+s)}{2\cancel{s}}=-\frac{3s-2}{2}$$

$$s^2(s-1)+k(s^2+1)=s^2(s-1)+\frac{3s-2}{2}(s^2+1)$$

$$=\frac{2s^3\cancel{+2s^2}-3s^3-3s+\cancel{2s^2}+2}{2}=0$$

$$-s^3-3s+2=0$$

$$s^3+3s-2=0$$

Studiamo la funzione

$$f(x)=x^3+3x-2$$

$$f'(x)=3x^2+3>0 \quad \forall x$$

Quindi $f(x)$ è crescente

$$f(1)=2 \qquad f(1/2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}-2<0$$

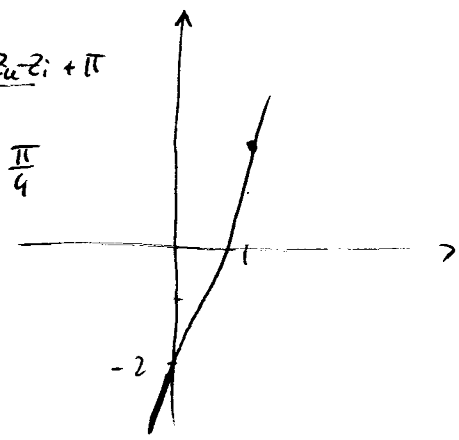
$$f(0)=-2$$

Angoli uscita zeri

$$\beta^+_k=\sum \angle z_k-p_i-\sum_{k\neq i}\angle z_k-z_i+\pi$$

$$=\pi+\frac{3}{4}\pi+2\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\beta^-_k=-\frac{\pi}{4}$$




Quindi lo zero è tra $\frac{1}{2}$ e $1$. Lo zero è in $0.6$ che è l'unico punto doppio

3) $s \longrightarrow s+1/2$

$$(s+1/2)^2(s+1/2-1)+k\left[(s+1/2)^2+1\right]=0$$

$$8s^3+(8k+4)s^2+(8k-2)s+(10k-1)=0$$

Tabella di Routh

| | |
|---|---|
| $8$ | $8k-2$ |
| $8k+4$ | $10k-1$ |
| $\frac{16k(k+1)}{8k+1}$ | |
| $10k-1$ | |

| $-1/2$ | $0$ | $1/10$ | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + |
| − | + | + | + | + |
| − | + | − | − | + |
| − | − | − | + | + |

stabilità per

$$K>1$$

Quindi si hanno radici con $Re<1/2$ per ogni $K>1$.

ES 4

1) $W(s) = \dfrac{1+s^2}{s(1+2s)}$

$T = 2$ spezzamento $\frac{1}{T} = \frac{1}{2}$

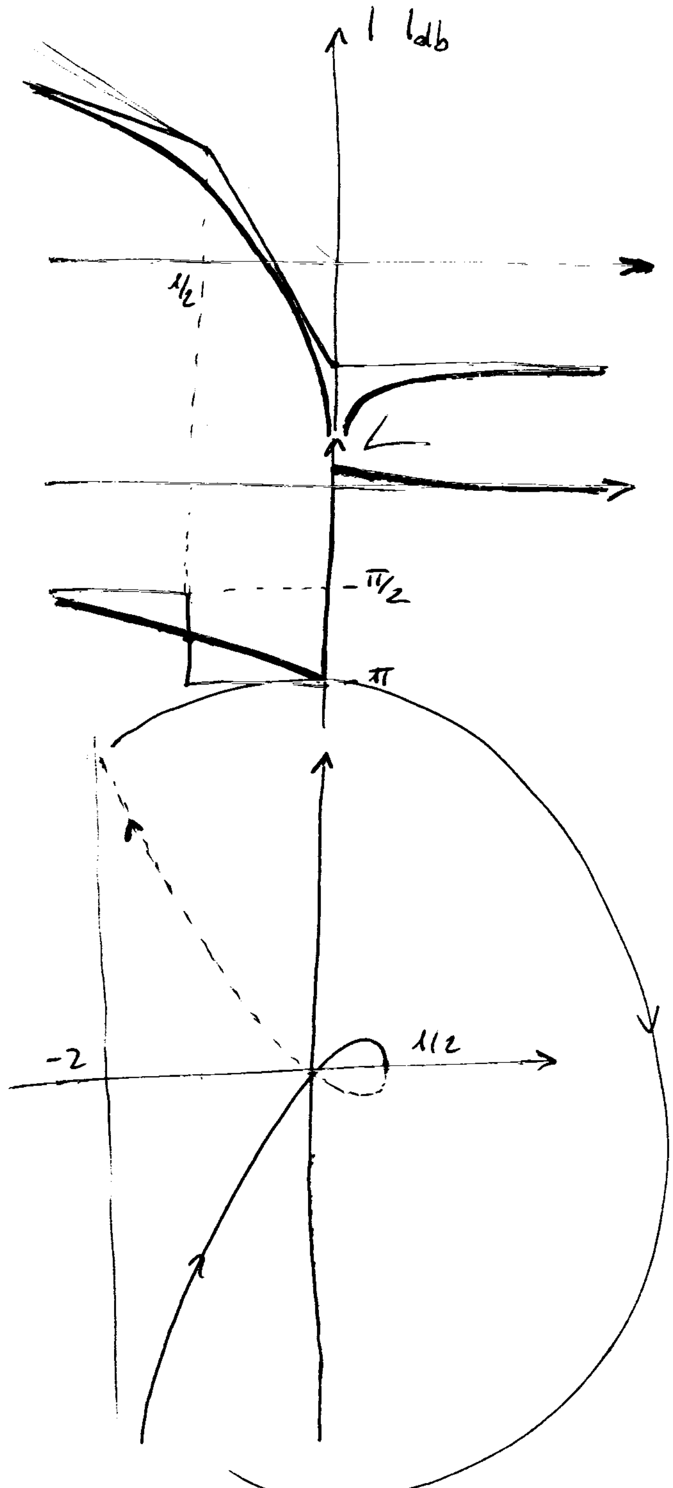
$\omega_n = 1$

$$W(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{j\omega(1+2j\omega)} =$$

$$= \frac{(1-\omega^2)(1-2j\omega)}{j\omega(1+4\omega^2)}$$

$$\operatorname{Re} W = \frac{(\omega^2-1)\,2}{1+4\omega^2}$$

$$\operatorname{Im} W = \frac{(\omega^2-1)}{\omega(1+4\omega^2)}$$




$\omega = 1 \qquad W(1) = 0$

$\omega = 0^+ \qquad \operatorname{Re} = -2 \qquad \operatorname{Im} = -\infty$

$\omega = +\infty \qquad W(\infty) = \frac{1}{2}$

$\omega^2 = x \qquad \operatorname{Re} W = 2\dfrac{x-1}{4x+1} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{2(4x+1)-(2x-2)4}{(4x+1)^2} = \frac{\cancel{8x}+2-\cancel{8x}+8}{(\ \ )^2} > 0 \quad \forall x$$

$f(x)$ è sempre crescente. Quindi

$W(s) + 2$ è positiva reale

~~[illegible]~~

2) Per il criterio di Nyquist $\quad P=0 \quad Z=P-N$

$-\frac{1}{k}<0 \Rightarrow N=0 \Rightarrow Z=0$ stabile $\forall K>0$

$0<-\frac{1}{K}<1/2 \Rightarrow N=-2 \Rightarrow Z=2$ 2 instabili $\forall K<-2$

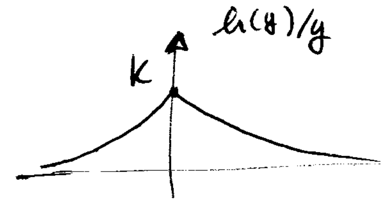
$-\frac{1}{k}>\frac{1}{2} \Rightarrow N=1 \Rightarrow Z=1$ 1 instabili $-2<K<0$

3) Poiché $W(s)+2$ è positiva reale

e quindi abbiamo stabilità se

$$0<\frac{h(y)}{y}<\frac{1}{2}$$

$y>0 \qquad \frac{K\overset{\shortparallel}{\frac{y}{y+1}}}{y} = \frac{K}{y+1} \le K$




~~y<0~~ $\frac{h(-y)}{-y} \overset{\text{dispari}}{=} \frac{-h(y)}{-y} = \frac{h(y)}{y} = \frac{K}{y+1} \le K$

Quindi si ha stabilità per $K<1/2$ perché

in tal caso $0<\frac{h(y)}{y}<1/2 \quad \forall y\neq 0$

e si può applicare il criterio del cerchio.

$\boxed{ES\ 5}$

$h = 2$ per avere errore finito con la rampa parabolica

$h_p = 1 \qquad h_c = h - h_p = 1$

$\varepsilon = 0.1 \qquad \hat{G}_p(0) = \frac{1}{5} \qquad K_c = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\hat{G}_p(0)} = 50$

$$G_c(s)G_p(s) = \underbrace{G_p(s)\frac{K_c}{s}}_{\hat{W}(s)} G_R(s)$$

$$|\hat{W}(5j)| = \left|\frac{\cancel{50}^{\cancel{10}\,2}}{j\cancel{5}}\frac{1}{j8(5+j5)}\right| = \frac{2}{|5+j5|} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$C = \frac{1}{|\hat{W}(5j)|} = \frac{5}{\sqrt{2}} > 1 \qquad \text{amplificare}$$

$$\angle\hat{W}(5j) = -180^\circ - \angle 5+j5 = -180^\circ - 45$$

$$m_\varphi^\circ = 180 + \angle\hat{W}(5j) = -45$$

$$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^\circ = 15 - (-45) = 60 \qquad \text{anticipare}$$

Serve una rete anticipatrice