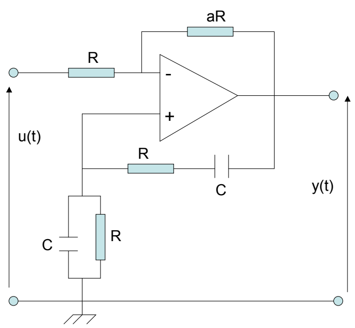
Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2005 - Versione A

Importante: giustificare le risposte con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio 1A. Si consideri lo schema di figura



dove tutte le resistenze sono uguali (valore R) eccetto una (valore aR), tutti i condensatori uguali (valore C), l'operazionale **ideale**, e sia inoltre $RC = 1$. É richiesto di:

- determinare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$, tra $u(t)$ e $y(t)$;
- studiare la stabilitá di $G(s)$ al variare di $a \geq 0$ e, in particolare, determinare se esistono valori di a tali per cui i modi del sistema sono sinusoidi pure;
- determinare la risposta impulsiva nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$;
- determinare, nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$, e solo quando esiste, la risposta a regime permanente al segnale $u(t) = cos(2t)$.

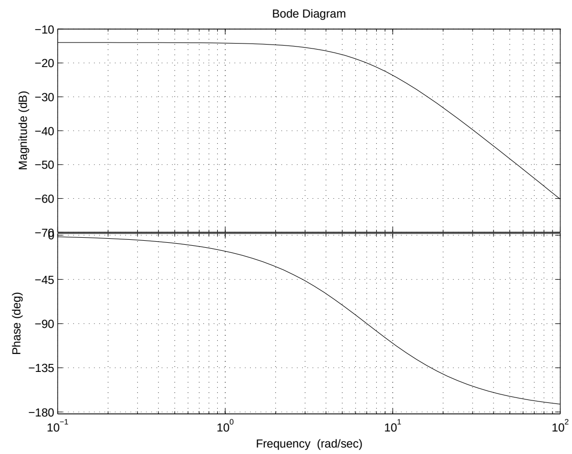
Esercizio 2A. Si consideri la classica connessione in retroazione unitaria negativa di $G(s) = \frac{K(s^2+\frac{1}{2}s+\frac{3}{2})}{s(s-1)^2}$.

- si tracci il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- si tracci il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- si impieghi il Criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli in anello chiuso a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare del guadagno K da 0 a $+\infty$.

Esercizio 3A. Data $G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}$:

- si tracci il luogo delle radici ($K > 0$);
- si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso sono esponenziali reali.

Esercizio 4A. Dopo una sessione di misure, si sono ottenuti i seguenti diagrammi di Bode di $G(s)$, che si sa avere la struttura $G(s) = \frac{a}{(1+\frac{s}{b})^2}$:



Si vuole progettare un compensatore $C(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

- errore a regime in risposta alla rampa unitaria $|e_{r,1}| \tilde{=} 0.1$;
- frequenza di attraversamento $\omega_c = 2$;
- margine di fase $PM \geq 45^o$.

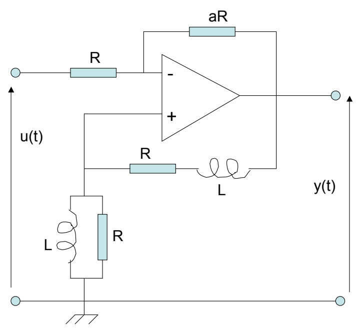
É richiesto di:

- determinare i valori di a e b, compatibili con i diagrammi riportati;
- **motivando la risposta**, spiegare a che tipo di rete é necessario ricorrere;
- **(facoltativo):** calcolare l'espressione di $C(s)$ (**suggerimento:** il calcolo di $C(s)$ puó essere effettuato, **a scelta**, sia basandosi sui diagrammi riportati, sia sfruttando l'espressione analitica determinata per $G(s)$).

Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2005 - Versione B

Importante: giustificare le risposte con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio 1B. Si consideri lo schema di figura



dove tutte le resistenze sono uguali (valore R) eccetto una (valore aR), tutte le induttanze uguali (valore L), l'operazionale **ideale**, e sia inoltre $L/R = 1$. É richiesto di:

- determinare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$, tra $u(t)$ e $y(t)$;
- studiare la stabilitá di $G(s)$ al variare di $a \geq 0$ e, in particolare, determinare se esistono valori di a tali per cui i modi del sistema sono sinusoidi pure;
- determinare la risposta impulsiva nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$;
- determinare, nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$, e solo quando esiste, la risposta a regime permanente al segnale $u(t) = cos(2t)$.

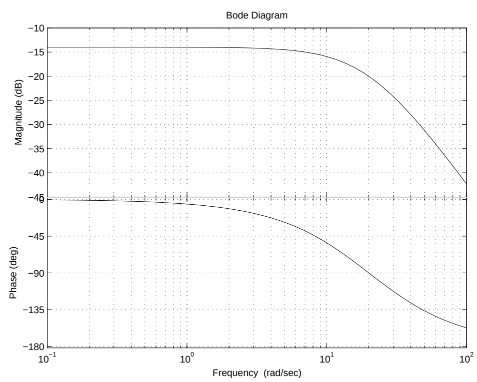
Esercizio 2B. Si consideri la classica connessione in retroazione unitaria negativa di $G(s) = \frac{K(s^2+s+6)}{s(s-2)^2}$.

- si tracci il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- si tracci il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- si impieghi il Criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli in anello chiuso a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare del guadagno K da 0 a $+\infty$.

Esercizio 3B. Data $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+\frac{3}{2})}$:

- si tracci il luogo delle radici ($K > 0$);
- si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso sono esponenziali reali.

Esercizio 4B. Dopo una sessione di misure, si sono ottenuti i seguenti diagrammi di Bode di $G(s)$, che si sa avere la struttura $G(s) = \frac{a}{(1+\frac{s}{b})^2}$:



Si vuole progettare un compensatore $C(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

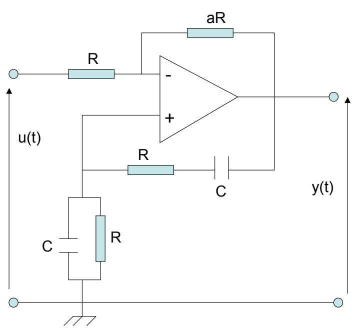
- errore a regime in risposta alla rampa unitaria $|e_{r,1}| \tilde{=} 0.1$;
- frequenza di attraversamento $\omega_c = 6$;
- margine di fase $PM \geq 45^o$.

É richiesto di:

- determinare i valori di a e b, compatibili con i diagrammi riportati;
- **motivando la risposta**, spiegare a che tipo di rete é necessario ricorrere;
- **(facoltativo):** calcolare l'espressione di $C(s)$ (**suggerimento:** il calcolo di $C(s)$ puó essere effettuato, **a scelta**, sia basandosi sui diagrammi riportati, sia sfruttando l'espressione analitica determinata per $G(s)$).

Fondamenti di Automatica - 13 luglio 2005 - Soluzioni

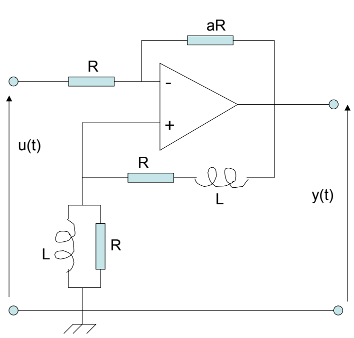
Esercizio 1A. Si consideri lo schema di figura



dove tutte le resistenze sono uguali (valore R) eccetto una (valore aR), tutti i condensatori uguali (valore C), l'operazionale **ideale**, e sia inoltre $RC = 1$. É richiesto di:

- determinare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$, tra $u(t)$ e $y(t)$;
- studiare la stabilitá di $G(s)$ al variare di $a \geq 0$ e, in particolare, determinare se esistono valori di a tali per cui i modi del sistema sono sinusoidi pure;
- determinare la risposta impulsiva nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$;
- determinare, nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$, e solo quando esiste, la risposta a regime permanente al segnale $u(t) = cos(2t)$.

Esercizio 1B. Si consideri lo schema di figura



dove tutte le resistenze sono uguali (valore R) eccetto una (valore aR), tutte le induttanze uguali (valore L), l'operazionale **ideale**, e sia inoltre $L/R = 1$. É richiesto di:

- determinare la funzione di trasferimento, sia $G(s)$, tra $u(t)$ e $y(t)$;
- studiare la stabilitá di $G(s)$ al variare di $a \geq 0$ e, in particolare, determinare se esistono valori di a tali per cui i modi del sistema sono sinusoidi pure;
- determinare la risposta impulsiva nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$;
- determinare, nei casi $a = 1, 2, \frac{9}{2}$, e solo quando esiste, la risposta a regime permanente al segnale $u(t) = cos(2t)$.

Soluzione. Il "partitore" che connette l'uscita a massa rende facilmente (per **entrambe** le versioni)

$$V_+(s) = V_-(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1} Y(s),$$

e sfruttando tale relazione nell'altro ramo resistivo si ottiene facilmente

$$G(s) = -a \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + (2 - a)s + 1}.$$

La stabilitá é garantita per $0 \leq a < 2$, mentre per $a = 2$ si ottengono modi $cos(t)$ e $sin(t)$. La risposta impulsiva é l'antitrasformata di $G(s)$, quindi

$$\begin{cases} a = 1 & \Rightarrow \quad G(s) = -1 - \frac{2s}{s^2+s+1} & \Rightarrow \quad g(t) = -\delta(t) - 2e^{-\frac{t}{2}}[cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)] \\ a = 2 & \Rightarrow \quad G(s) = -2 - \frac{6s}{s^2+1} & \Rightarrow \quad g(t) = -2\delta(t) - 6cos(t) \\ a = \frac{9}{2} & \Rightarrow \quad G(s) = -\frac{9}{2} - \frac{99}{4}\frac{s}{(s-\frac{1}{2})(s-2)} & \Rightarrow \quad g(t) = -\frac{9}{2}\delta(t) + \frac{33}{4}e^{\frac{t}{2}} - 33e^{2t} \end{cases}$$

Infine, la risposta a regime ha senso solo in caso di stabilitá, e quindi per $a = 1$. In tal caso risulta $G(2i) = -\frac{21}{13} + \frac{12}{13}i$, da cui la risposta a regime a $u(t) = cos(2t)$ della forma

$$y(t) = -\frac{3}{13}[7cos(2t) + 4sin(2t)].$$

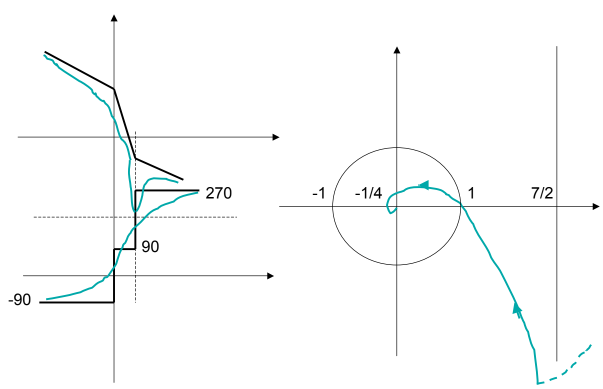
Esercizio 2A. Si consideri la classica connessione in retroazione unitaria negativa di $G(s) = \frac{K(s^2+\frac{1}{2}s+\frac{3}{2})}{s(s-1)^2}$.

- si tracci il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- si tracci il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- si impieghi il Criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli in anello chiuso a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare del guadagno K da 0 a $+\infty$.

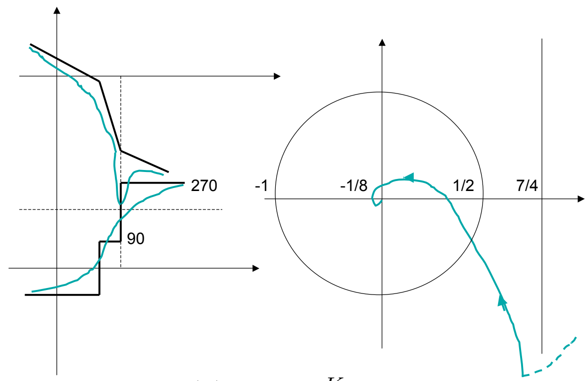
Esercizio 2B. Si consideri la classica connessione in retroazione unitaria negativa di $G(s) = \frac{K(s^2+s+6)}{s(s-2)^2}$.

- si tracci il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- si tracci il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- si impieghi il Criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli in anello chiuso a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare del guadagno K da 0 a $+\infty$.

Soluzione. In figura sono evidenziati Bode e Nyquist ($\omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}}, \xi = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$, per un discreto picco di antirisonanza)



dove le intersezioni con gli assi sono date da $x = 1$ per $\omega^2 = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{4}$ per $\omega^2 = 3$, $y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}} \simeq 0.2$ per $\omega^2 = \frac{7}{5}$ e dove l'asintoto é in $x = \frac{7}{2}$. É evidente che $G_+ = 2$, e che $N = 0$ se $K < 4$ e $N = 2$ se $K > 4$. Quindi per $K = 0$ si ha un polo nullo e due a parte reale positiva, per $0 < K < 4$ due poli a parte reale positiva ed uno negativo, per $K = 4$ due poli immaginari puri ed uno negativo, per $K > 4$ stabilitá (tre poli a parte reale negativa). Per la versione B, intersezioni con gli assi ed asintoti hanno valore la metá, e sono assunti alle frequenze doppie (in particolare ω_n raddoppia, mentre ξ é lo stesso). Le conclusioni sulla stabilitá sono identiche, ma fanno riferimento al valore $K = 8$ invece di $K = 4$. I diagrammi sono ora



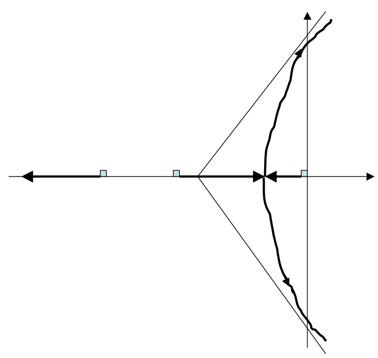
Esercizio 3A. Data $G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}$:

- si tracci il luogo delle radici ($K > 0$);
- si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso sono esponenziali reali.

Esercizio 3B. Data $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+\frac{3}{2})}$:

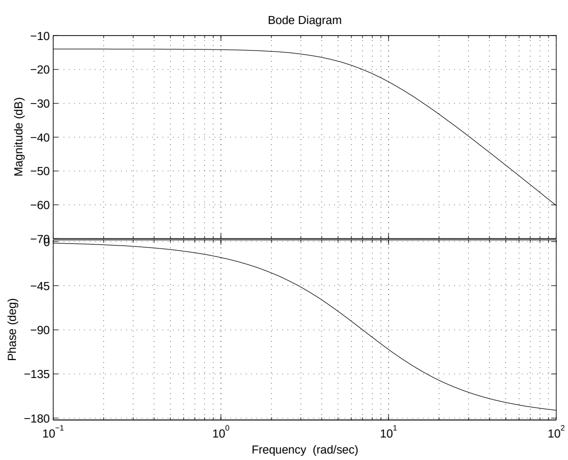
- si tracci il luogo delle radici ($K > 0$);
- si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso sono esponenziali reali.

Soluzione. Si trova il centro asintoti in $s = -\frac{5}{3}$, l'unico polo doppio accettabile $s = -0.78$ (valore corretto $s = \frac{\sqrt{7}-5}{3}$, ottenuto per $K \simeq 2.115$), ed un'intersezione con l'asse immaginario per $K = 30$ nei punti $\pm\sqrt{6}i$. In figura é disegnato il luogo.



Quindi si ha stabilitá per $0 < K < 30$, e modi esponenziali reali per $0 < K < 2.115$. Per la versione B, tutti i valori di s dimezzano (centro asintoti, punto doppio, intersezione con l'asse immaginario) e la forma del diagramma é la stessa. I valori di K diventano 8 volte piú piccoli.

Esercizio 4A. Dopo una sessione di misure, si sono ottenuti i seguenti diagrammi di Bode di $G(s)$, che si sa avere la struttura $G(s) = \frac{a}{(1+\frac{s}{b})^2}$:



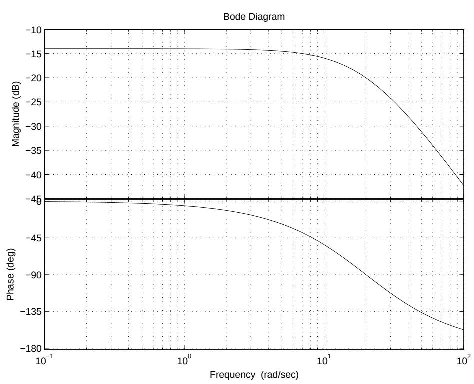
Si vuole progettare un compensatore $C(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

- errore a regime in risposta alla rampa unitaria $|e_{r,1}| \simeq 0.1$;
- frequenza di attraversamento $\omega_c = 2$;
- margine di fase $PM \geq 45^o$.

É richiesto di:

- determinare i valori di a e b, compatibili con i diagrammi riportati;
- **motivando la risposta**, spiegare a che tipo di rete é necessario ricorrere;
- **(facoltativo):** calcolare l'espressione di $C(s)$ (**suggerimento:** il calcolo di $C(s)$ puó essere effettuato, **a scelta**, sia basandosi sui diagrammi riportati, sia sfruttando l'espressione analitica determinata per $G(s)$).

Esercizio 4B. Dopo una sessione di misure, si sono ottenuti i seguenti diagrammi di Bode di $G(s)$, che si sa avere la struttura $G(s) = \frac{a}{(1+\frac{s}{b})^2}$:



Si vuole progettare un compensatore $C(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

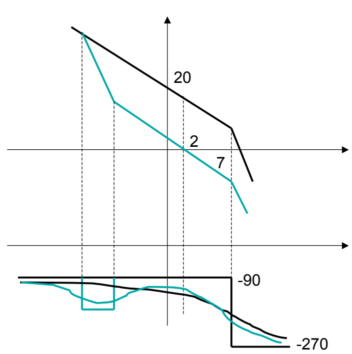
- errore a regime in risposta alla rampa unitaria $|e_{r,1}| \tilde{=} 0.1$;
- frequenza di attraversamento $\omega_c = 6$;
- margine di fase $PM \geq 45^o$.

É richiesto di:

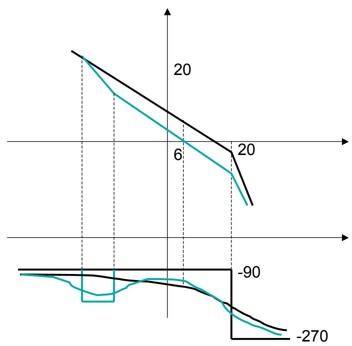
- determinare i valori di a e b, compatibili con i diagrammi riportati;
- **motivando la risposta**, spiegare a che tipo di rete é necessario ricorrere;

- **(facoltativo):** calcolare l'espressione di $C(s)$ (**suggerimento:** il calcolo di $C(s)$ puó essere effettuato, **a scelta**, sia basandosi sui diagrammi riportati, sia sfruttando l'espressione analitica determinata per $G(s)$).

Soluzione. Poiché la fase raggiunge -90^o in $\omega = 7$, si ha $b = 7$. A tale frequenza il modulo vale $-20db$, e quindi $\frac{1}{10}$ in scala lineare. Poiché nel punto di spezzamento di un polo doppio siamo $6db$ sotto il valore $a = G(0)$, corrispondente nella scala lineare a dividere per 2, il valore di $a = G(0)$ é pari a $\frac{1}{5}$, corrispondente a $-14db$, confermati dalla figura. Quindi $G(s) = \frac{1}{5(1+\frac{s}{7})^2}$. Il requisito alla rampa é soddisfatto introducendo un termine tipo $\frac{50}{s}$, e poiché dal grafico proposto della fase é evidente che $arg[G(i2)] \tilde{=} -30^o$, per $\frac{50}{s}G(s)$ in ω_c si ha un margine di fase di circa 60^o. É ora necessario posizionare una coppia polo-zero (rete ritardatrice) con $|z| = 5|p|$ per abbassare ω_c, posizionando zero e polo sufficientemente lontani da ω_c cosicché il PM di 60^o non vari di molto, e si mantenga in particolare superiore a 45^o. Ad esempio $C(s) = \frac{50(1+20s)}{s(1+100s)}$ va bene sia dal punto di vista di ω_c che del PM (anche con polo-zero 10 volte piú grandi il requisito sul PM sarebbe soddisfatto). In figura é riportato Bode per $\frac{50}{s}G(s)$ e per $C(s)G(s)$.



Per la versione B, ragionamenti analoghi conducono a $G(s) = \frac{1}{5(1+\frac{s}{20})^2}$, ed alla necessitá di un legame $3|z| = 5|p|$. Una possibile soluzione é $C(s) = \frac{50(1+3s)}{s(1+5s)}$.


20
6
20
-90
-270