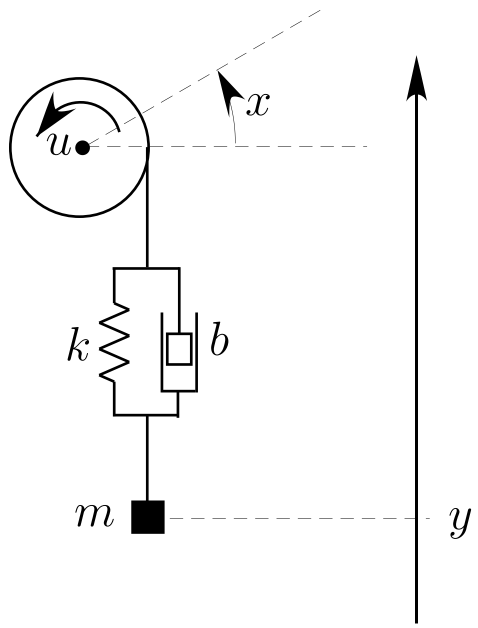
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compito di Fondamenti di Automatica del 14/1/2005

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

1. **(7pt)** Si consideri il sistema meccanico illustrato nella figura seguente

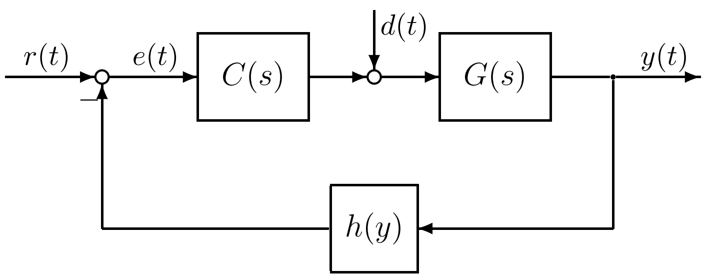


che rappresenta una carrucola di raggio R e con momento di inerzia J che ruota con attrito trascurabile alla quale e' applicata una coppia u. Questa e' collegata ad un cavo con elasticita' k e attrito b ad una massa m. La massa e' sottoposta alla forza peso (accelerazione di gravita' g) e ha posizione y.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.

2. Determinare la coppia costante $\bar{u}$ che annulla la velocita' della massa ($\dot{y} = 0$). Sia $\delta := u - \bar{u}$. Determinare la funzione di trasferimento che lega l'ingresso δ all'uscita y.

2. **(9pt)** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



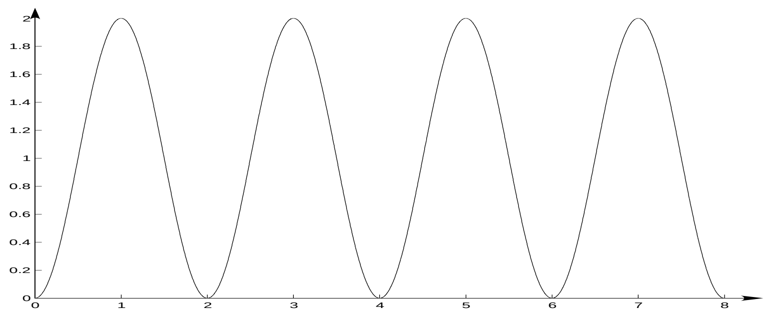
Si supponga che $h(y) = y$, $C(s) = K$ e $G(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)}$

1. Determinare il luogo dei poli in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino asintoti, eventuali intersezioni con l'asse immaginario, angoli di ingresso/uscita e i punti doppi.

2. Determinare il valori di $K > 0$ per i quali il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contente modi non oscillatori?

3. **(7pt)** Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$.
1. Determinare il margine di fase di $KG(s)$ al variare di $K > 0$.
2. Supponiamo che $h(y) = y$, $C(s) = \frac{K}{s^2}$ con $K > 0$. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di K attraverso il criterio di Nyquist.
3. Supponiamo ora che $h(0) = 0$ e che $1 < h(y)/y < 2$ e che $C(s) = K$ con $K > 0$. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiusa al variare di K attraverso il criterio del cerchio (e' richiesta la dimostrazione analitica e non grafica).

4. **(4pt)** Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $h(y) = y$, $C(s) = Ks$ e $G(s) = \frac{a}{s^2+b^2}$ dove $a, b, K \in \mathbb{R}$.
1. Determinare a, b sapendo che, con $K = 0$ e $d(t) = 1$ si osserva l'uscita y mostrata nella seguente figura.



2. Supponiamo che $r(t) = 5$ e $d(t) = \sin(t)$. Calcolare l'uscita a regime in funzione di K.

ES 1

$$\begin{cases} -m\ddot{y} - b(\dot{y} - R\dot{x}) - k(y - Rx) - mg = 0 \\ -J\ddot{x} - Rb(R\dot{x} - \dot{y}) - Rk(Rx - y) + u = 0 \end{cases}$$

equazioni del moto

$\dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$

$\Downarrow$

$y(t) = \bar{y}$ costante

$x(t) = \bar{x}$ costante

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(\bar{y} - R\bar{x}) - mg = 0 \quad \cdot R \\ -Rk(R\bar{x} - \bar{y}) + u = 0 \end{cases}$$

moltiplico sommo

$$-mgR + u = 0 \qquad \bar{u} = mgR$$

costante

Quando non si è in equilibrio

$y(t) = \bar{y} + \delta y(t) \qquad \dot{y} = \delta\dot{y} \qquad \ddot{y} = \delta\ddot{y}$

$x(t) = \bar{x} + \delta x(t) \qquad \dot{x} = \delta\dot{x} \qquad \ddot{x} = \delta\ddot{x}$

$u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$

$$-m\delta\ddot{y} - b(\delta\dot{y} - R\delta\dot{x}) - \cancel{k(\bar{y} - R\bar{x})} - k(\delta y - R\delta x) - \cancel{mg} = 0$$

$$-J\delta\ddot{x} - Rb(R\delta\dot{x} - \delta\dot{y}) - \cancel{Rk(R\bar{x} - \bar{y})} - Rk(R\delta x - \delta y) + \cancel{\bar{u}} + \delta u = 0$$

Ponendo $U(s) = \mathcal{L}[\delta u] \quad X(s) = \mathcal{L}[\delta x] \quad Y(s) = \mathcal{L}[\delta y]$

$$\begin{cases} (ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)R\,X(s) \\ (Js^2 + bR^2 s + kR^2)X(s) = (bs + k)R\,Y(s) + U(s) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{ms^2 + bs + k}{(bs + k)R}\,Y(s)$$

$$(Js^2 + bR^2 s + kR^2)(ms^2 + bs + k)\,Y(s) = (bs + k)^2 R^2\,Y(s) + (bs + k)R\,U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(bs + k)R}{(Js^2 + bR^2 s + kR^2)(ms^2 + bs + k) - (bs + k)^2 R^2}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

$(s-2)(s^2+1)+k=0$

centro asintoti

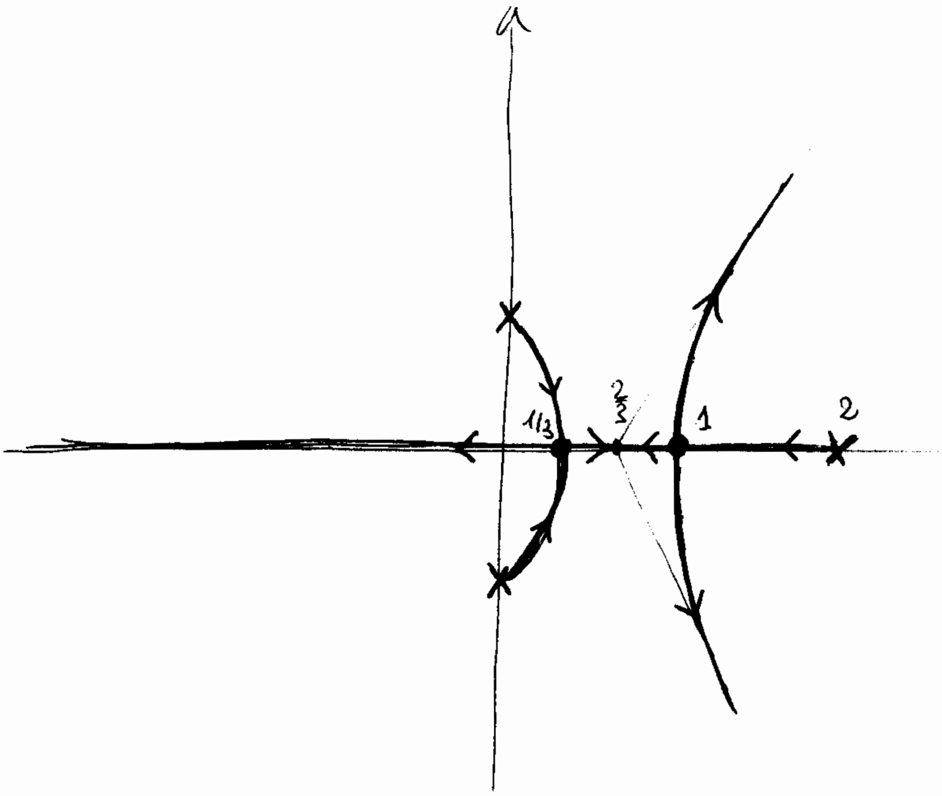
$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{3} = \frac{2}{3}$$

Punti doppi

$$\begin{cases} (s-2)(s^2+1)+k=0 \\ s^2+1+(s-2)2s=0 \end{cases}$$

$$3s^2-4s+1=0$$

$$s_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$



Angoli entrata/uscita

da $p = j$

$$-\angle j-2 \; -\alpha - \angle j+j = 180°$$

$$-153-\alpha-90=180$$

$$\alpha = -423 \sim -63$$

$s_1 = 1 \qquad k_1 = -(s_1-2)(s_1^2+1) = 2$

$s_2 = \frac{1}{3} \qquad k_2 = -(s_2-2)(s_2^2+1) = +\frac{5}{3}\,\frac{10}{9} = \frac{50}{27}$

Per $\frac{50}{27} < k < 2$ le radici di $(s-2)(s^2+1)+k=0$ sono tutte reali e quindi i modi del sistema in catena chiusa sono non oscillatori

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1. Determinare la pulsazione di attraversamento ω_A in funzione di ω_A

$$\left|\frac{K}{(1+j\omega_A)^2}\right| = 1 \iff \left|\frac{K}{(1+j\omega_A)^2}\right|^2 = 1 \iff K^2 = |(1-\omega_A^2)+j2\omega_A|^2$$

$$(1-\omega_A^2)^2 + 4\omega_A^2 = K^2$$

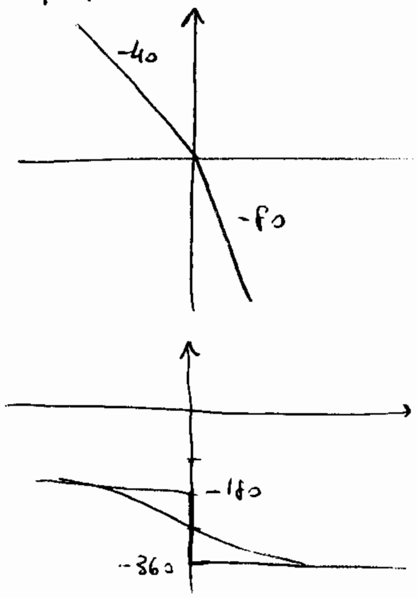
$$(\omega_A^2+1)^2 = K^2$$

$$\omega_A^2+1 = K \qquad \omega_A = \sqrt{K-1} \qquad K>1$$

Per $K<1$ il diagramma di Nyquist non attraversa il cerchio unitario e quindi la ω_A non esiste

$$m_\varphi = \pi + \angle\frac{K}{(1+j\omega_A)^2} = \pi - 2\angle(1+j\omega_A)$$
$$= \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\omega_A$$
$$= \pi - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{K-1}$$

2. Tracciamo il diagramma di Bode e Nyquist di



$$W(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2[(1-\omega^2)+2j\omega]} = \frac{(1-\omega^2)-2j\omega}{-\omega^2[(1-\omega^2)^2+4\omega^2]}$$

$$Re = \frac{1-\omega^2}{-\omega^2[(1-\omega^2)^2+4\omega^2]}$$

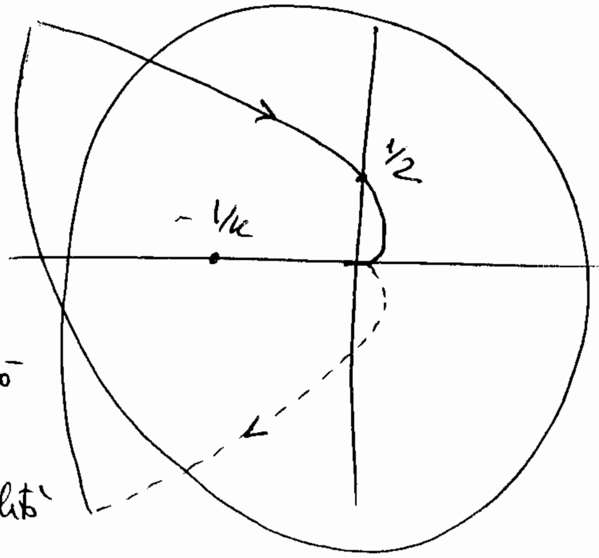
$$Im = \frac{2}{\omega[(1-\omega^2)^2+4\omega^2]}$$

$\omega \simeq 0^+$ $\quad Re \sim -\frac{1}{\omega^2} \quad Im \sim \frac{2}{\omega}$

andamento parabolico → no asintoti

$\omega = 1$ $\quad Re = 0$

$Im = \frac{1}{2}$

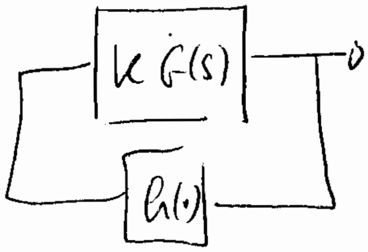


Criterio di Nyquist $P=0$

$-\frac{1}{K}<0 \ (K>0) \quad N=-2 \Rightarrow Z=2$ instabile

$-\frac{1}{K}>0 \ (K<0) \quad N=-1 \Rightarrow Z=1$ instabile

ES. 3



3. Abbiamo stabilità se

$$F(s) = \frac{1+k_2 k G(s)}{1+k_1 k G(s)} \quad \text{è positiva reale}$$

$k>0$

$$= \frac{1+2k\frac{1}{(s+1)^2}}{1+k\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{(s+1)^2+2k}{(s+1)^2+k} = \frac{s^2+2s+1+2k}{s^2+2s+1+k}$$

$$\mathrm{Re}\, F(j\omega) = \mathrm{Re}\frac{(1+2k-\omega^2)+2j\omega}{(1+k-\omega^2)+2j\omega} = \mathrm{Re}\,\frac{[(1+2k-\omega^2)+2j\omega][(1+k-\omega^2)-2j\omega]}{(1+k-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$= \frac{(1+2k-\omega^2)(1+k-\omega^2)+4\omega^2}{(1+k-\omega^2)^2+4\omega^2} \quad \text{deve essere } \geq 0 \quad \forall \omega$$

$x = \omega^2$

$$f(x) \stackrel{!}{=} \frac{(x-1-2k)(x-1-k)+4x}{(x-1-k)^2+4x} \geq 0 \quad \forall x>0$$

il denominatore è sicuramente >0
serve controllare il numeratore che è

$$x^2 + (4-1-1-2k-k)x + (1+2k)(1+k) > 0$$

$$g(x) = x^2 + (2-3k)x + (1+2k)(1+k) > 0$$

Se $0<k<\frac{2}{3}$ abbiamo la somma di tre termini positivi che quindi sono positivi

Se $k>\frac{2}{3}$ il minimo di $g(x)$ è

$$x_{min} = \frac{3k-2}{2} \qquad g(x_{min}) = \left(\frac{3k-2}{2}\right)^2 + \frac{2-3k}{2}(3k-2) + (1+2k)(1+k)$$

$$= \frac{24k-k^2}{4}$$

Poiché per $k>\frac{2}{3}$ $x_{min}>0$
allora dobbiamo avere in questo caso $g(x_{min})>0$
e ciò avviene per $0<k<24$
Quindi lo risultato finale è $\boxed{0<k<24}$

$\boxed{ES. 4}$

1. $D(s) = \frac{1}{s}$ $\quad Y(s) = \frac{a}{s^2+b^2}\frac{1}{s}$

Dalla figura si nota che $y(t) = 1 - \cos\omega t$ periodica

Il periodo è $T = 2$ e quindi $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$y(t) = 1 - \cos\pi t = 1 - \frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2}$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\pi} = \frac{2(s^2+\pi^2) - s(s+j\pi) - s(s-j\pi)}{2s(s^2+\pi^2)}$$

$$= \frac{\cancel{2s^2} + 2\pi^2 - \cancel{s^2} - \cancel{j\pi s} - \cancel{s^2} + \cancel{j\pi s}}{2s(s^2+\pi^2)} = \frac{\pi^2}{s(s^2+\pi^2)} = \frac{a}{s(s^2+b^2)}$$

$a = \pi^2 \quad b = \pi$

2. $T_{uy}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{ks}{s^2+b^2+kas} = \frac{ks}{s^2+k\pi^2 s+\pi^2}$

$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{\pi^2}{s^2+k\pi^2 s+\pi^2}$

i) $u(t) = 5 \quad d(t) = 0 \quad\quad y(t) \approx T_{uy}(0)\, 5 = 0$

ii) $u(t) = 0 \quad d(t) = \sin t$

$$y(t) \approx |T_{dy}(j)| \sin\left(t + \angle T_{dy}(j)\right)$$

$$|T_{dy}(j)| = \frac{\pi^2}{|\pi^2 - 1 + jk\pi^2|} = \frac{\pi^2}{\sqrt{k^2\pi^4 + (\pi^2-1)^2}}$$

$$\angle T_{dy}(j) = -\angle(\pi^2-1) - jk\pi^2 = -\operatorname{arctg}\frac{k\pi^2}{\pi^2-1}$$

Ciò vale quando il sistema retroazionato è STABILE

Per la regola di Cartesio il denominatore $s^2+k\pi^2 s+\pi^2$ è stabile $\Leftrightarrow k > 0$