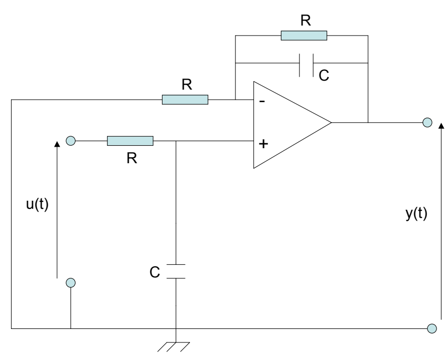
Compito di Fondamenti di Automatica - 20 settembre 2005

Importante: giustificare le risposte con un minimo di ragionamento e di calcoli.

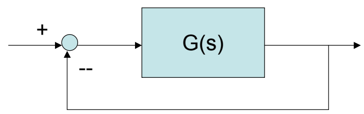
Esercizio 1. Si consideri lo schema di figura (operazionale ideale, resistenze uguali, condensatori uguali, $RC = 1$, $u(t)$ tensione d'ingresso, $y(t)$ tensione d'uscita). É richiesto di:

- introducendo x_1, x_2 come le tensioni sui due condensatori, scrivere un modello di stato;
- calcolare la funzione di trasferimento ed il corrispondente legame input/output (equazione differenziale tra u e y);
- calcolare l'evoluzione libera di uscita con condizioni iniziali $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$;

Nota bene: chi non riuscisse a rispondere alla prima domanda, puó rispondere alle altre due immaginando di partire da un modello di stato con $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = [\,2 \quad -1\,]$.



Esercizio 2. Si consideri la classica connessione in retroazione unitaria negativa di $G(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s-1)^2}$.



- si tracci il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- si tracci il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- si impieghi il Criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli in anello chiuso a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare del guadagno $K > 0$.

Esercizio 3. Data $G(s) = \frac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)^2(s-\frac{1}{3})}$:

- si tracci il luogo delle radici ($K > 0$);
- si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso non hanno componenti oscillatorie.

Esercizio 4. Data $G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$ si vuole progettare un compensatore $C(s)$ stabilizzante in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino pari a circa 0.01;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 1;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú.

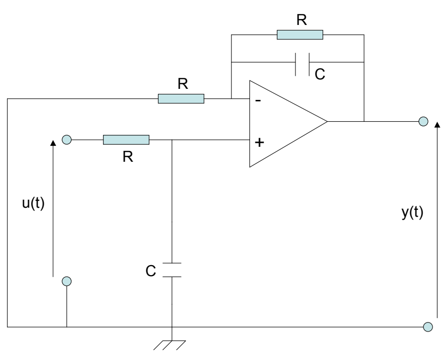
É richiesto di trovare un'espressione esplicita per un possibile adatto $C(s)$, motivando adeguatamente le ragioni che portano alla sua scelta.

Fondamenti di Automatica - 20 settembre 2005 - Soluzioni

Esercizio 1. Si consideri lo schema di figura (operazionale ideale, resistenze uguali, condensatori uguali, $RC = 1$, $u(t)$ tensione d'ingresso, $y(t)$ tensione d'uscita). É richiesto di:

- introducendo x_1, x_2 come le tensioni sui due condensatori, scrivere un modello di stato;
- calcolare la funzione di trasferimento ed il corrispondente legame input/output (equazione differenziale tra u e y);
- calcolare l'evoluzione libera di uscita con condizioni iniziali $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$;

Nota bene: chi non riuscisse a rispondere alla prima domanda, puó rispondere alle altre due immaginando di partire da un modello di stato con $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = [\,2 \quad -1\,]$.

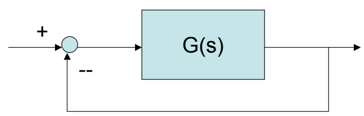


Soluzione. Si possono scrivere le relazioni $C\dot{x}_1 = \frac{u-x_1}{R}$, $C\dot{x}_2 = \frac{x_1-x_2}{R}$, $y = x_1 + x_2$, da cui

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [\,1 \quad 1\,]\, x$$

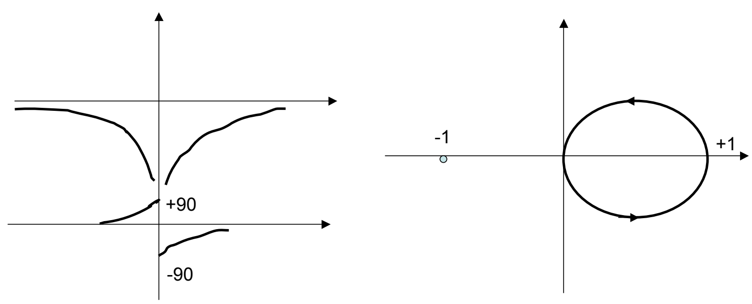
Quindi $G(s) = H(sI - F)^{-1}G = \frac{s+2}{(s+1)^2}$, $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{u} + 2u$. La generica risposta libera é $y(t) = (a + bt)e^{-t}$, e sfruttando le condizioni iniziali si trova $y(t) = te^{-t}$. Chi utilizza invece il modello di stato "suggerito", trova $G(s) = -\frac{s}{(s+2)(s+3)}$, $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = -\dot{u}$, $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$.

Esercizio 2. Si consideri la classica connessione in retroazione unitaria negativa di $G(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s-1)^2}$.



- si tracci il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- si tracci il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- si impieghi il Criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli in anello chiuso a parte reale positiva ed a parte reale nulla al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Per il diagramma di Bode tutto accade nelle vicinanze di $\omega = 1$: poli e zeri si "compensano", ma c'é un picco di antirisonanza infinito. Anche per la fase c'é "compensazione", ma prima parte da zero e sale fino a $= 90^o$, poi una discontinuitá la porta a -90^o, poi ritorna a zero, come indicato in figura.

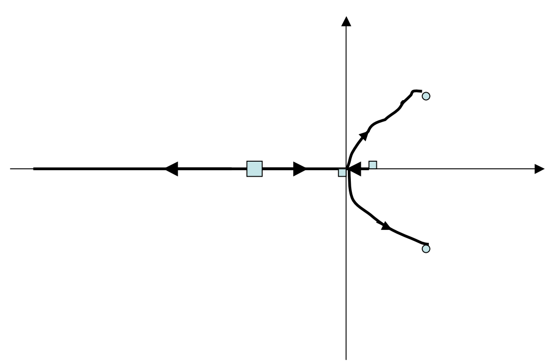


Per Nyquist, non ci sono asintoti e lo studio di parte reale ed immaginaria di $G(i\omega)$ mostra che esse possono annullarsi solo per $\omega = 0, 1$. Per $\omega = 0$ si annulla solo la parte immaginaria e quella reale vale 1 (il punto di partenza), per $\omega = 1$ si annullano entrambe, ed il diagramma attraversa l'origine (in accordo al picco di antirisonanza infinito). Poi per $\omega \to +\infty$ il diagramma ritorna nel punto di partenza. Quindi il diagramma di Nyquist "completato" con l'immagine speculare consta di una curva chiusa percorsa 2 volte! (vedi figura). $G_+ = 2$ mostra che, se $K > 0$, essendo $N = 0$, si ha instabilitá con 2 poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. Data $G(s) = \frac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)^2(s-\frac{1}{3})}$:

- si tracci il luogo delle radici ($K > 0$);
- si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso é stabile;
- si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso non hanno componenti oscillatorie.

Soluzione. Abbiamo tre poli, in $s = -1$ (doppio) ed in $s = \frac{1}{3}$, e due zeri complessi in $s = 1 \pm i$.



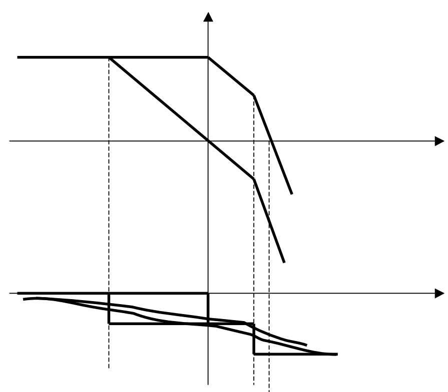
L'equazione dei punti doppi porge $0 = s(s+1)(s^2 - 5s + \frac{22}{3})$, che ammette le soluzioni $s = -1$ (corrispondente a $K = 0$, il punto di partenza), $s = 0$ (corrispondente a $K = \frac{1}{6} > 0$), e due radici complesse non ammissibili (il K corrispondente risulta complesso). Si ha attraversamento dell'asse immaginario per $K = \frac{1}{6}$, ma nel punto doppio $s = 0$, per cui in pratica per ogni valore positivo di K si ha almeno un ramo del luogo nel semipiano destro chiuso, e quindi instabilitá (come si puó verificare per sicurezza applicando Routh). Un solo asintoto (asse reale verso $-\infty$) completa le informazioni necessarie per disegnare il luogo (vedi figura). Infine, solo per $K > \frac{1}{6}$ compaiono rami fuori dall'asse reale, e quindi modi con componenti oscillatorie, che sono quindi assenti per $0 < K \leq \frac{1}{6}$.

Esercizio 4. Data $G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$ si vuole progettare un compensatore $C(s)$ stabilizzante in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino pari a circa 0.01;
- pulsazione di attraversamento circa uguale a 1;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú.

É richiesto di trovare un'espressione esplicita per un possibile adatto $C(s)$, motivando adeguatamente le ragioni che portano alla sua scelta.

Soluzione. Il requisito a regime impone di aumentare il guadagno di un fattore 10. Il diagramma di Bode di $10G(s)$ é in figura.



Da esso si evince una ω_c pari a circa $10\sqrt{10}$, con un piccolissimo margine di fase. Occorrendo diminuire ω_c é necessario il ricorso ad una rete ritardatrice, con il polo posizionato due decadi prima di ω_c, quindi in $s = -\frac{1}{100}$, e lo zero in ω_c, quindi in $s = -1$. Con tale scelta, il diagramma "taglia" circa in $\omega_c = 1$, migliorando nel contempo il margine di fase, che risulta ora di quasi 90^o. Quindi ad esempio $C(s) = 10\frac{s+1}{1+100s}$ va bene (si veda la figura).