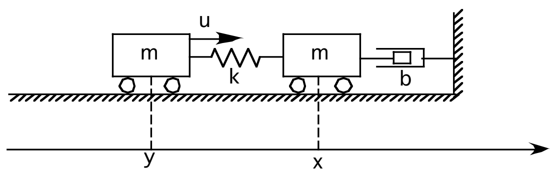
Compito di Fondamenti di Automatica - 21 giugno 2006
Soluzioni

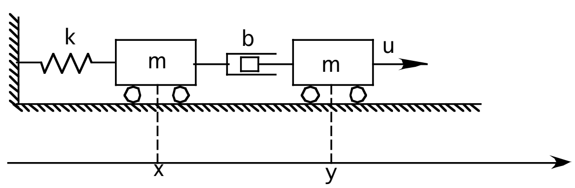
Esercizio 1A. Dato lo schema di figura



dove $m = 1$ é la massa dei due carrelli, k la costante elastica della molla, b il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore, $x(t), y(t)$ le posizioni dei centri di massa dei due carrelli, $u(t)$ la forza applicata (si assuma nulla per semplicitá la lunghezza a riposo l_0 della molla). É richiesto di:

- calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$;
- calcolare i coefficienti k, b sapendo che e^{-t}, $e^{-\frac{t}{6}}\cos[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ e $e^{-\frac{t}{6}}\sin[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ sono modi del sistema.

Esercizio 1B. Dato lo schema di figura



dove $m = 1$ é la massa dei due carrelli, k la costante elastica della molla, b il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore, $x(t), y(t)$ le posizioni dei centri di massa dei due carrelli, $u(t)$ la forza applicata (si assuma nulla per semplicitá la lunghezza a riposo l_0 della molla). É richiesto di:

- calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$;

- calcolare i coefficienti k, b sapendo che e^{-t}, $e^{-\frac{t}{6}}\cos[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ e $e^{-\frac{t}{6}}\sin[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ sono modi del sistema.

Soluzione. Nel caso A si ha $m\ddot{y} = k(x-y)+u$ e $m\ddot{x} = k(y-x)-b\dot{x}$. Applicando Laplace, dopo alcuni conti si ottiene

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \frac{k+bs+s^2}{s[s^3+bs^2+2ks+kb]}$$

Nel caso B si ha $m\ddot{y} = b(\dot{x}-\dot{y})+u$ e $m\ddot{x} = -kx+b(\dot{y}-\dot{x})$. Applicando Laplace, dopo alcuni conti si ottiene

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \frac{k+bs+s^2}{s[s^3+2bs^2+ks+kb]}$$

La condizione sui modi impone che $\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{6}$ e -1 siano radici del denominatore, cioé che il denominatore sia divisibile per $\left[s^2+\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}\right](s+1) = s^3+\frac{4}{3}s^2+s+\frac{2}{3}$. Dalla struttura del denominatore, ció accade se e solo se $b=\frac{4}{3}$ e $k=\frac{1}{2}$ nel caso A, $b=\frac{2}{3}$ e $k=1$ nel caso B.

Esercizio 2A. Data $G(s) = \frac{s-\frac{5}{3}}{(s^2-4s+5)(s+5)}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k>0$;
- determinare i valori di $k>0$ tali per cui fenomeni oscillatori sono assenti e quelli per cui il sistema ad anello chiuso é stabile, determinando le intersezioni del luogo con l'asse immaginario e/o ricorrendo a Routh.

Esercizio 2B. Data $G(s) = \frac{s+\frac{5}{3}}{(s^2+4s+5)(s-5)}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k>0$;
- determinare i valori di $k>0$ tali per cui fenomeni oscillatori sono assenti e quelli per cui il sistema ad anello chiuso é stabile, determinando le intersezioni del luogo con l'asse immaginario e/o ricorrendo a Routh.

Soluzione. I poli sono $2\pm i$, -5 ($-2\pm i$, 5 nella versione B) e lo zero $\frac{5}{3}$ ($-\frac{5}{3}$ nella versione B). L'equazione dei punti doppi fornisce

$$2s(s^2-2s-\frac{5}{3}) = 0 \text{ (vers A)} \quad 2s(s^2+2s-\frac{5}{3}) = 0 \text{ (vers B)}$$

che porge $s=0$ cui corrisponde $k=15$, e $s = 1\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ ($s=-1\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ nella versione B). A $s = 1-\sqrt{\frac{8}{3}} \simeq -0.63$ ($s = -1+\sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 0.63$ nella versione B) corrisponde

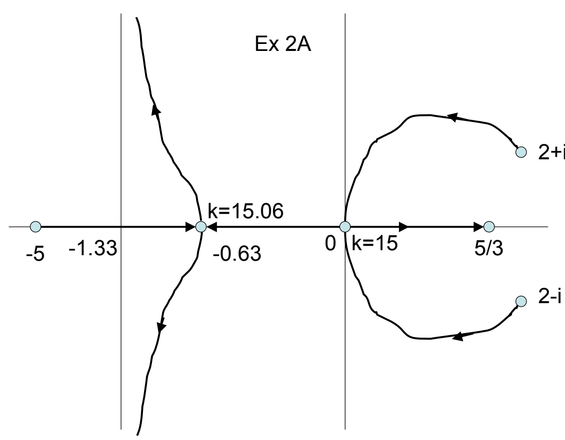
$k = 2 + \frac{16}{3}\sqrt{6} \simeq 15.06$, mentre $s = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}$ ($s = -1 - \sqrt{\frac{8}{3}}$ nella versione B) non appartiene al luogo (si vede sia valutando i rami sull'asse reale, sia valutando il valore di k che diventa negativo, $k = 2 - \frac{16}{3}\sqrt{6} \simeq -11.06$). L'asintoto (verticale) si valuta in $-\frac{4}{3}$ ($\frac{4}{3}$ nella versione B), mentre le intersezioni con gli assi si valutano imponendo $d(i\omega)+kn(i\omega) = 0$ ed eguagliando quindi a zero parti reale ed immaginaria. Si trova

$$k = 15 - \frac{3}{5}\omega^2, \quad \omega[k - 15 - \omega^2] = 0$$

che ammette l'unica soluzione $\omega = 0$, $k = 15$. Il luogo della versione A é in figura, quello della versione B é identico ma specularmente rovesciato rispetto all'asse immaginario. Di conseguenza per $15 \leq k \leq 2 + \frac{16}{3}\sqrt{6} \simeq 15.06$ i poli sono tutti reali (no fenomeni oscillatori), mentre per ogni valore positivo di k si ha sempre almeno un polo a parte reale nulla o positiva e quindi l'instabilitá. La tabella di Routh conferma l'analisi di stabilitá (sono riportate affiancate quelle di entrambe le versioni)

1	$k-15$	$*$	1	$k-15$
1	$-\frac{5}{3}(k-15)$	$*$	-1	$\frac{5}{3}(k-15)$
$\frac{8}{3}(k-15)$		$*$	$\frac{8}{3}(k-15)$	
$-\frac{5}{3}(k-15)$		$*$	$\frac{5}{3}(k-15)$	

che non ha mai la prima colonna interamente positiva.



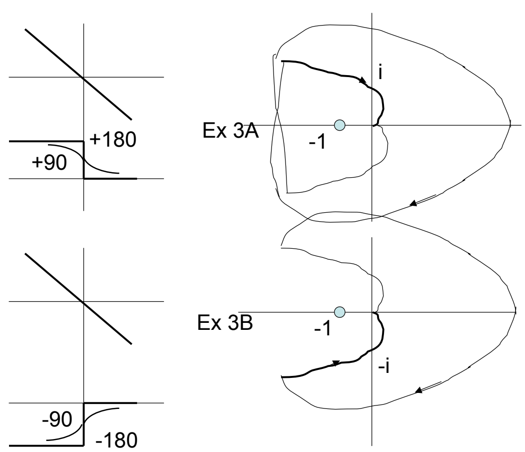
Esercizio 3A. Data $G(s) = \frac{1-s}{s^2(1+s)}$

- tracciare Bode e Nyquist;
- evidenziare le intersezioni con gli assi di Nyquist e studiare quindi la stabilitá (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva e negativa) della funzione ad anello chiuso $W(s)$ corrispondente a $kG(s)$, al variare del parametro reale k.

Esercizio 3B. Data $G(s) = \frac{1+s}{s^2(1-s)}$

- tracciare Bode e Nyquist;
- evidenziare le intersezioni con gli assi di Nyquist e studiare quindi la stabilitá (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva e negativa) della funzione ad anello chiuso $W(s)$ corrispondente a $kG(s)$, al variare del parametro reale k.

Soluzione. I diagrammi di Bode sono in figura. Nyquist non ha asintoti, e si trova che $\mathbb{I}mG(i\omega) = 0$ mai, mentre $\mathbb{R}eG(i\omega) = 0$ per $\omega = 1$, cui corrisponde $G(i\omega) = i$ ($G(i\omega) = -i$ nella versione B). Sia per k positivo che negativo, il numero di giri non dipende dal valore di k, per cui possiamo valutarlo rispettivamente per $k = 1$ e per $k = -1$, che corrisponde a ruotare Nyquist di 180^o. Se $k > 0$ si ha $N_G = -2$ che con $G_+ = 0$ implica $W_+ = 2$, cioé instabilitá con due poli a parte reale positiva ed uno negativo (nella versione B, $G_+ = 1$ e $N_G = 0$ che implica $W_+ = 1$, cioé instabilitá con un polo positivo e due a parte reale negativa), mentre se $k < 0$ si ha $N_G = -1$ che con $G_+ = 0$ implica $W_+ = 1$, cioé instabilitá con due poli a parte reale negativa ed uno positivo (nella versione B, $G_+ = 1$ e $N_G = -1$ che implica $W_+ = 2$, cioé instabilitá con un polo negativo e due a parte reale positiva). Poli a parte reale nulla sono presenti solo nel caso $k = 0$ (poli coincidenti con quelli di $G(s)$). In figura i diagrammi di Nyquist per $k > 0$ di entrambe le versioni.



Esercizio 4A. Data $G(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$, é richiesto il progetto di un compensatore stabilizzante $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche:

$$|e_{reg,gradino}| \simeq 0.01, \ \omega_c \simeq 100, \ PM \simeq 90^o$$

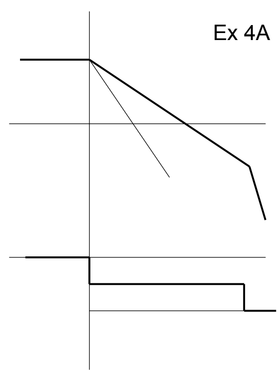
Come si dovrebbero modificare le precedenti specifiche se si volesse un tempo di salita inferiore ed una sovraelongazione maggiore?

Esercizio 4B. Data $G(s) = \frac{50}{(1+\frac{s}{10})^2}$, é richiesto il progetto di un compensatore stabilizzante $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche:

$$|e_{reg,gradino}| \simeq 0.01,\ \omega_c \simeq 1000,\ PM \simeq 90^o$$

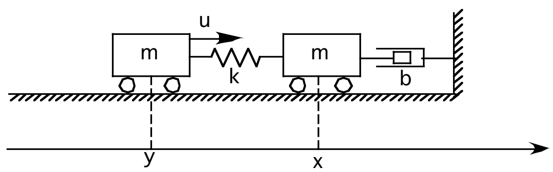
Come si dovrebbero modificare le precedenti specifiche se si volesse un tempo di salita inferiore ed una sovraelongazione maggiore?

Soluzione. É necessario aumentare il guadagno di un fattore 10, dopodiché Bode per $10G(s)$ evidenzia una $\omega_c \simeq 10$ con un PM ridottissimo. Occorre una rete anticipatrice per migliorare la fase e aumentare ω_c, ed é immediato rendersi conto che la scelta $C(s) = 10\frac{1+s}{1+\frac{s}{1000}}$ introduce una cancellazione zero-polo stabile e soddisfa tutte le specifiche. Per la Versione B, risulta tutto spostato di una decade in avanti ed inoltre il guadagno di Bode dei due compensatori non é piú 10 ma 2, cioé $C(s) = 2\frac{1+\frac{s}{10}}{1+\frac{s}{10000}}$. Infine, una ω_c piú grande ed un PM inferiore garantirebbero tempo di salita inferiore e sovraelongazione maggiore.



Compito di Fondamenti di Automatica - 21 giugno 2006
Versione A

Esercizio 1A. Dato lo schema di figura



dove $m = 1$ é la massa dei due carrelli, k la costante elastica della molla, b il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore, $x(t), y(t)$ le posizioni dei centri di massa dei due carrelli, $u(t)$ la forza applicata (si assuma nulla per semplicitá la lunghezza a riposo l_0 della molla). É richiesto di:

- calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$;
- calcolare i coefficienti k, b sapendo che e^{-t}, $e^{-\frac{t}{6}}\cos[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ e $e^{-\frac{t}{6}}\sin[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ sono modi del sistema.

Esercizio 2A. Data $G(s) = \frac{s-\frac{5}{3}}{(s^2-4s+5)(s+5)}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k > 0$;
- determinare i valori di $k > 0$ tali per cui fenomeni oscillatori sono assenti e quelli per cui il sistema ad anello chiuso é stabile, determinando le intersezioni del luogo con l'asse immaginario e/o ricorrendo a Routh.

Esercizio 3A. Data $G(s) = \frac{1-s}{s^2(1+s)}$

- tracciare Bode e Nyquist;
- evidenziare le intersezioni con gli assi di Nyquist e studiare quindi la stabilitá (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva e negativa) della funzione ad anello chiuso $W(s)$ corrispondente a $kG(s)$, al variare del parametro reale k.

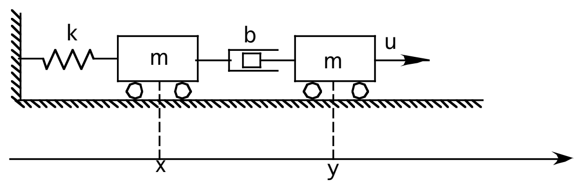
Esercizio 4A. Data $G(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$, é richiesto il progetto di un compensatore stabilizzante $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche:

$$|e_{reg,gradino}| \simeq 0.01, \ \omega_c \simeq 100, \ PM \simeq 90^o$$

Come si dovrebbero modificare le precedenti specifiche se si volesse un tempo di salita inferiore ed una sovraelongazione maggiore?

Compito di Fondamenti di Automatica - 21 giugno 2006
Versione B

Esercizio 1B. Dato lo schema di figura



dove $m = 1$ é la massa dei due carrelli, k la costante elastica della molla, b il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore, $x(t), y(t)$ le posizioni dei centri di massa dei due carrelli, $u(t)$ la forza applicata (si assuma nulla per semplicitá la lunghezza a riposo l_0 della molla). É richiesto di:

- calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$;
- calcolare i coefficienti k, b sapendo che e^{-t}, $e^{-\frac{t}{6}}\cos[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ e $e^{-\frac{t}{6}}\sin[\frac{\sqrt{23}}{6}t]$ sono modi del sistema.

Esercizio 2B. Data $G(s) = \frac{s+\frac{5}{3}}{(s^2+4s+5)(s-5)}$, é richiesto di:

- disegnare il luogo delle radici per $k > 0$;
- determinare i valori di $k > 0$ tali per cui fenomeni oscillatori sono assenti e quelli per cui il sistema ad anello chiuso é stabile, determinando le intersezioni del luogo con l'asse immaginario e/o ricorrendo a Routh.

Esercizio 3B. Data $G(s) = \frac{1+s}{s^2(1-s)}$

- tracciare Bode e Nyquist;
- evidenziare le intersezioni con gli assi di Nyquist e studiare quindi la stabilitá (ed in particolare come varia il numero di poli a parte reale positiva e negativa) della funzione ad anello chiuso $W(s)$ corrispondente a $kG(s)$, al variare del parametro reale k.

Esercizio 4B. Data $G(s) = \frac{50}{(1+\frac{s}{10})^2}$, é richiesto il progetto di un compensatore stabilizzante $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche:

$$|e_{reg,gradino}| \simeq 0.01,\ \omega_c \simeq 1000,\ PM \simeq 90^o$$

Come si dovrebbero modificare le precedenti specifiche se si volesse un tempo di salita inferiore ed una sovraelongazione maggiore?