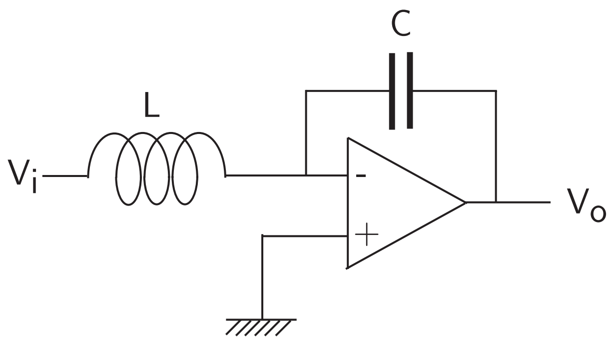
compito

Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compito di Fondamenti di Automatica del 9/1/2004

Cognome e nome: ____________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

1. **(6pt)** Si consideri il sistema elettrico illustrato nella figura seguente



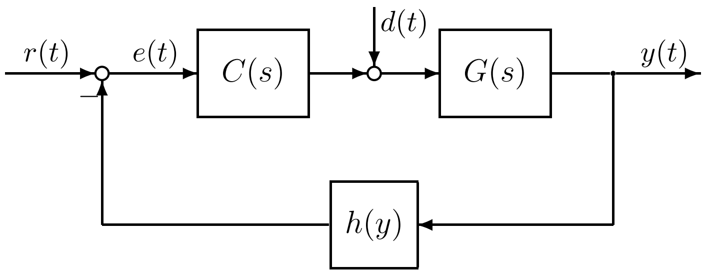
dove $L, C > 0$ e l'operazionale ha funzione di trasferimento

$$V_o(s) = \frac{K}{s+p}(V_+(s) - V_-(s))$$

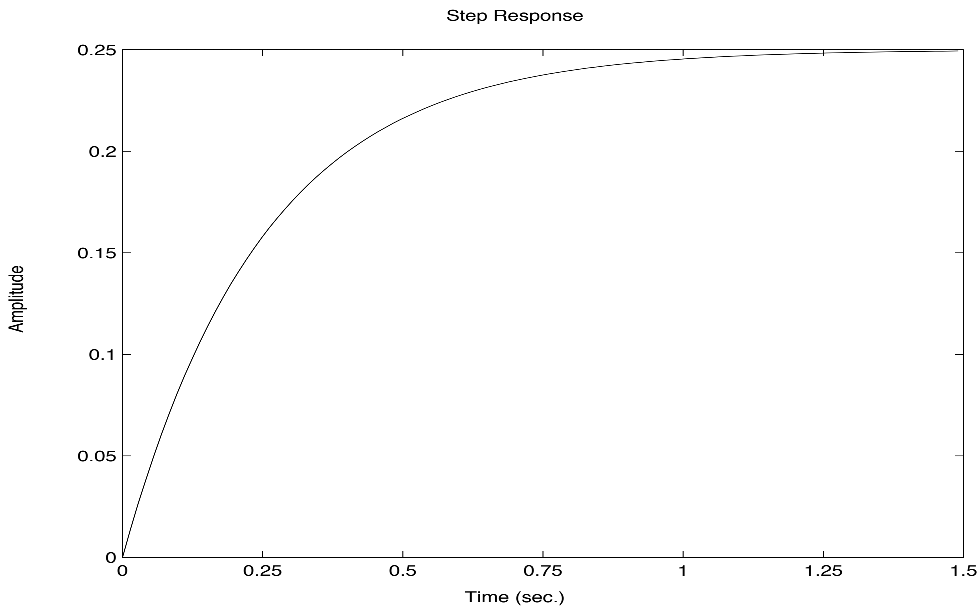
con $K, p > 0$ e ha impedenza di ingresso infinita.

Determinare la funzione di trasferimento che descrive il legame tra l'ingresso $V_i(s)$ e l'uscita $V_o(s)$ del sistema. Determinare per quali valori di L, C, K, p il sistema e' BIBO stabile.

2. **(9pt)** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che $h(y) = y$, $C(s) = \frac{K}{s^2}(s+z)$ e che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ abbia risposta al gradino unitario illustrata nella figura seguente.



dove $0 < z < 4$.
1. Supponendo che $z = 2$, determinare il luogo dei poli in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino asintoti, eventuali intersezioni con l'asse immaginario, angoli di ingresso/uscita e i punti doppi.
2. Determinare i valori di z per i quali il luogo presenta punti doppi. Cosa accade nei casi limite?
2. Determinare il valore di K e z per il quale il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contente un modo del tipo modo $e^{-t}\cos(t)$. Quali sono gli altri modi del sistema in catena chiusa per tali valori di K e z?

3. **(7pt)** Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$.
1. Supponiamo che $h(y) = y$, $C(s) = \frac{K}{s}$ con $K > 0$. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di K attraverso il criterio di Nyquist.
1. Supponiamo ora che $h(0) = 0$ e che $1 < h(y)/y < 2$. Supponiamo inoltre che $C(s) = K$ con $K > 0$. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiusa al variare di K attraberso il criterio del cerchio (e' richiesta la dimostrazione analitica e non grafica).

4. **(4pt)** Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $h(y) = y$, $C(s) = \frac{K}{s}$ e $G(s) = \frac{s+1}{s-1}$ dove $K > 0$. Supponiamo che $r(t) = 5$ e $d(t) = 2\sin(t)$. Calcolare l'errore a regime in funzione di K.

5. **(4pt)** Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $h(y) = y$ e

$$G(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Si determini un controllore $C(s)$ che garantisca che le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a. il sistema controllato abbia errore a regime finito in risposta alla rampa;

b. Il sistema in catena chiusa abbia risposta impulsiva con solo modi del tipo $t^n e^{-t}$.

ES 1

Vedi appunti / libro pagina 15

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-A(s)\,Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)+A(s)Z_1(s)}$$

dove $A(s) = \frac{k}{s+p}$ $\quad Z_1(s) = sL \quad Z_2(s) = \frac{1}{sC}$

da cui

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{k}{sC(s+p)}}{sL + \frac{1}{sC} + \frac{ksL}{s+p}} = \frac{-k}{sLsC(s+p)+(s+p)+ksLsC}$$

$$= \frac{-k}{LCs^3 + (k+p)LCs^2 + s + p}$$

ROUTH

3	LC	1
2	$(k+p)LC$	p
1	$\frac{k}{k+p}$	
0	p	

$$\frac{(k+p)LC - pLC}{(k+p)LC} = \frac{k\cancel{LC}}{(k+p)\cancel{LC}}$$

Stabile $\forall\ L, C, k, p > 0$

il resto si deve cambiare di conseguenza

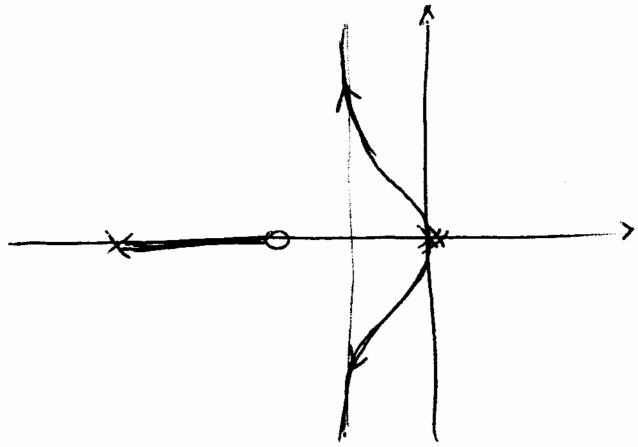
ES 2

$$G(s) = \frac{H}{1+s\tau} \qquad H = 1 \qquad \tau = 0.25 \qquad \Rightarrow G(s) = \frac{\cancel{4}\,1}{s+4}$$

$$T(s) = \frac{4K(s+z)}{s^2(s+4) + 4K(s+z)}$$

1) $z = 2$

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-4+2}{2} = -1$$



Punti doppi

$$\begin{cases} s^2(s+4) + 4K(s+2) = 0 \\ 2s(s+4) + s^2 + 4K = 0 \end{cases}$$

$$4K = -s[2s+8+s]$$

$$s^{\cancel{2}}(s+4) - \cancel{s}(3s+8)(s+2) = 0$$

$$s^2 + 4s - 3s^2 - 8s - 6s - 16 = 0$$

$$s^2 + 5s + 8 = 0 \qquad s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-32}}{2} \rightarrow < 0$$ non ci sono punti doppi

ROUTH

1	4K
4	8K
2K	
8K	

Stabilità $\forall K > 0$

2)
$$\begin{cases} s^2(s+4) + 4K(s+z) = 0 \\ 2s(s+4) + s^2 + 4K = 0 \end{cases}$$

$$4K = -s[3s+8]$$

$$s^2 + 4s - 3s^2 - 3zs - 8s - 8z = 0$$

$$2s^2 + (3z+4)s + 8z = 0$$

ci sono punti doppi $\Leftrightarrow \Delta = (3z+4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8z > 0$

$$9z^2 - 40z + 16 > 0$$

$z < \frac{4}{9}$ $\quad z > 4 \quad \Rightarrow 0 < z < \frac{4}{9}$

Per $z = 4$ si semplificano polo/zero

Per $z = \frac{4}{9}$ si ha un punto triplo

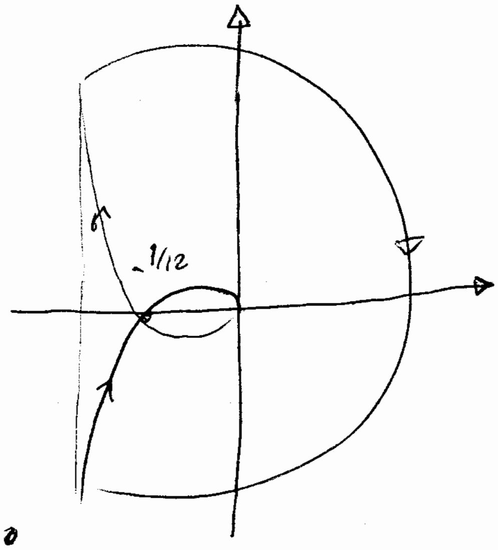
3) il modo $e^{-t}\cos t$ si ha quando $-1 \pm j$ sono zeri di $s^2(s+4) + 4K($

$$-2j(-1+j+4) + 4K(-1+j+z) = 0$$

parte reale e parte immaginaria $= 0$

$$\begin{cases} 2 + 4K(-1+z) = 0 \\ -6 + 4K = 0 \end{cases} \qquad K = 3/2 \qquad z = 2/3$$

$\boxed{\text{ES 3}}$



1) $CG = \dfrac{K}{s(s+1)(s+3)} = k\,W(s)$

$W = \dfrac{1}{s(s+1)(s+3)}$

$W(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(3-\omega^2+4j\omega)} = \dfrac{(3-\omega^2)-4j\omega}{j\omega[(3-\omega^2)^2+16\omega^2]}$

$Re = -\dfrac{4}{(3-\omega^2)^2+16\omega^2}$

$Im = -\dfrac{3-\omega^2}{\omega[(3-\omega^2)^2+16\omega^2]}$

$\omega = 0^+ \qquad Re = \dfrac{4}{9}$

$Im = 0 \qquad \omega = \sqrt{3} \qquad Re = -\dfrac{4}{3 \cdot 16} = -\dfrac{1}{12}$

$-\dfrac{1}{k} < -\dfrac{1}{12} \qquad N=0 \qquad Z=0 \qquad 0<k<12$

$-\dfrac{1}{12} < -\dfrac{1}{K} < 0 \qquad N=-2 \qquad Z=2 \qquad K>12$

2) $F(s) = \dfrac{1+2kW}{1+kW} = \dfrac{(s+1)(s+3)+2k}{(s+1)(s+3)+k}$ deve essere PR

numeratore + denominatore è Hurwitz $\forall k>0$

$Re\,F(j\omega) = \dfrac{(3-\omega^2+2k)(3-\omega^2+k)+16\omega^2}{(3+k-\omega^2)+16\omega^2} > 0 \qquad \omega^2 = x$

$(3-x+2k)(3-x+k)+16x>0$

$f(x) = x^2+(10-3k)x+(2k^2+9k+9)>0$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $k < 10/3 \qquad f(x)>0 \quad \forall x>0$

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $k > 10/3$

$f(x)>0 \iff \Delta = k^2-96k+64<0$

$0.67<k<95.33$

$\Rightarrow \quad 0<k<95.33$

ES 4

$$T_{re}(s) = \frac{1}{1+CG} = \frac{s(s-1)}{s(s-1)+k(s+1)}$$

denominatore $s^2+(k-1)s+k$

stabilità ~~[illegible]~~ $k>1$

$$T_{de}(s) = \frac{-s(s+1)}{s(s-1)+k(s+1)}$$

$d = 0 \quad r = 5 \qquad T_{re}(0) = 0 \Rightarrow e(t) \to 0$

$d = 2\sin t \quad r = 0$

$$T_{de}(j) = \frac{-j(1+j)}{j(-1+j)+k(1+j)} = \frac{1-j}{-1-j+k(1+j)} = \frac{1-j}{1+j}\,\frac{1}{k-1}$$

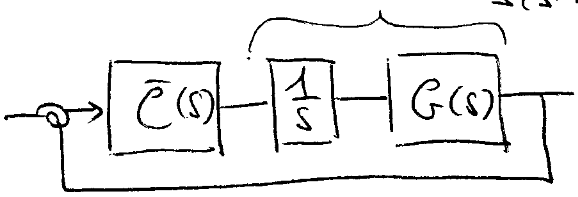
$$= \frac{j}{k-1}$$

$$e(t) \simeq \frac{2}{k-1}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \qquad k>1$$

ES 5

$p(s) = (s+1)^3$

$$\bar{G}(s) = \frac{s+1}{s(s-1)}$$



$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_0 = 1$

$y_1 = 1$

$$\begin{cases} 1 + x_1 - y_0 = 3 \\ x_1 + y_0 - 1 = 3 \end{cases}$$

$2x_1 = 6 \qquad x_1 = 3, \; y_0 =$

$$\bar{C}(s) = \frac{3s+1}{s+1} \qquad C(s) = \frac{3s+1}{s(s+1)}$$